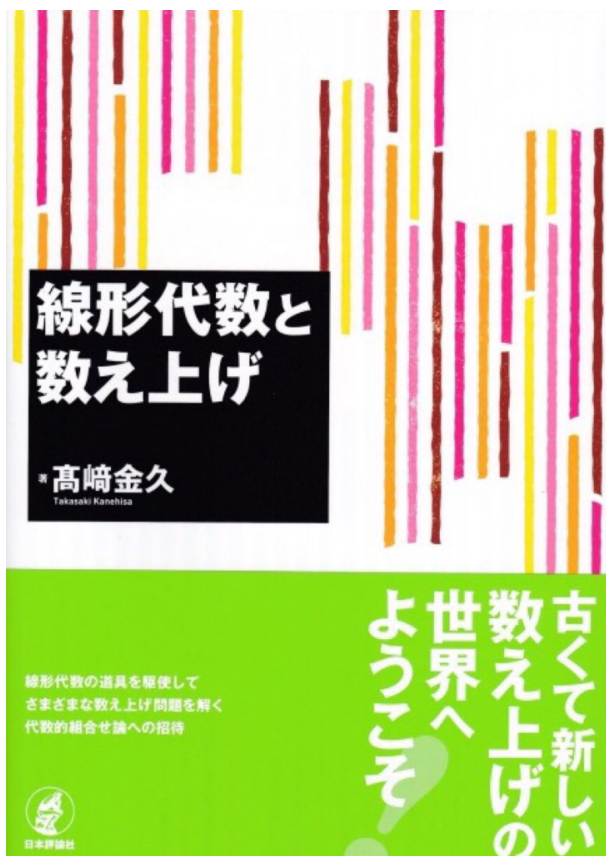


非交差経路和とその応用

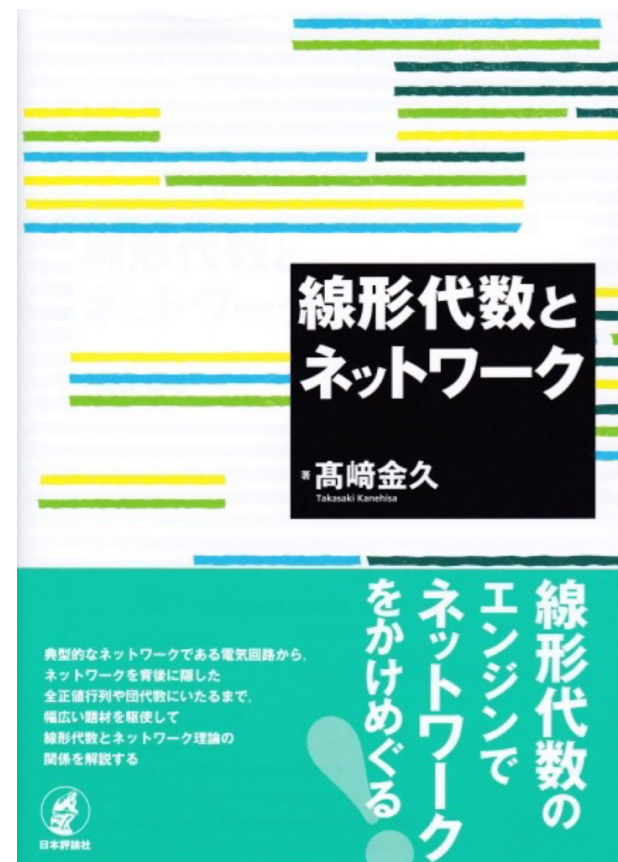
高崎金久

第3回研究コア交流会 2018年10月25日

Lindström-Gessel-Viennot公式は非交差経路和を行列式として表す公式である. その古典的な応用として, 3次元ヤング図形の数え上げ問題を紹介する.



数学セミナー (日本評論社)
2010年4月号～2011年6月号
単行本 2012年6月刊

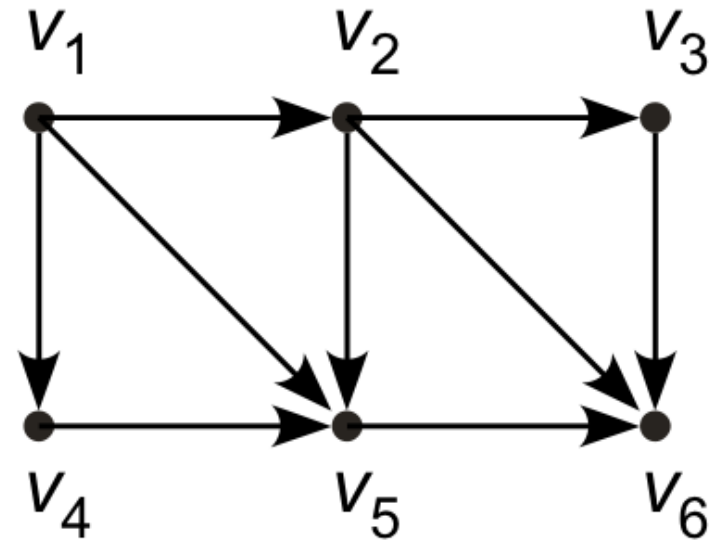


数学セミナー (日本評論社)
2015年7月号～2016年9月号
単行本 2017年3月刊

無閉路有向グラフにおける非交差経路の数え上げ

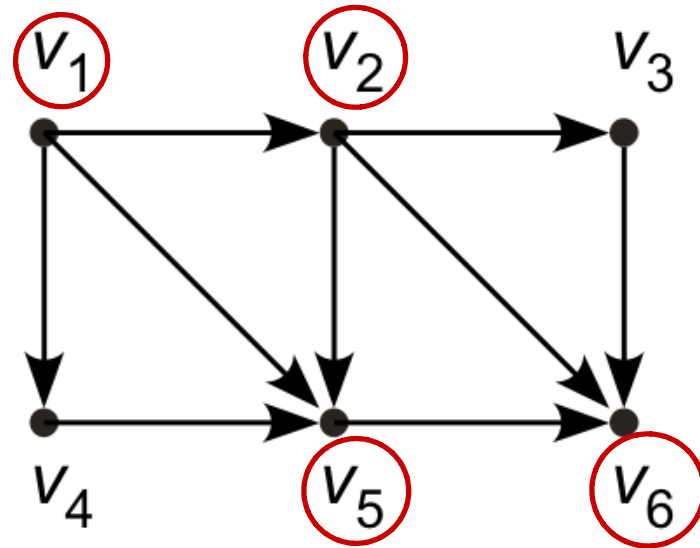
< 有向グラフの例 >

(平面的 + 無閉路)
(+ ある条件をみたす)

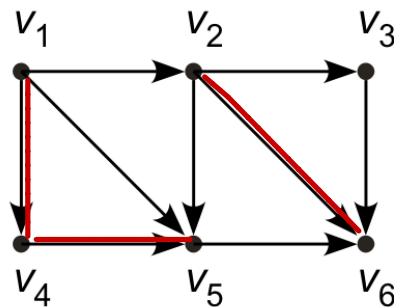


(v_1, v_2) と (v_5, v_6) を結ぶ非交差経路組 (P_1, P_2) は
何通りあるか?

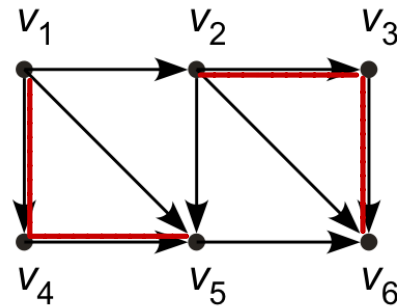
4通り の 非交差 経路 がある



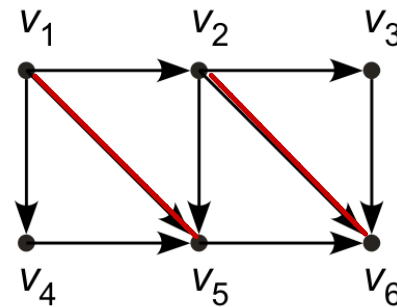
- ① $P_1 = (v_1, v_4, v_5), \quad P_2 = (v_2, v_6);$
- ② $P_1 = (v_1, v_4, v_5), \quad P_2 = (v_2, v_3, v_6);$
- ③ $P_1 = (v_1, v_5), \quad P_2 = (v_2, v_6);$
- ④ $P_1 = (v_1, v_5), \quad P_2 = (v_2, v_3, v_6);$



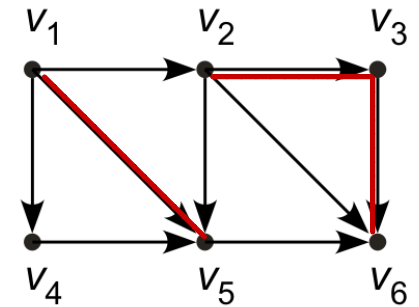
①



②



③



④

Lindström-Gessel-Viennot (LGV) 公式

始点の組 $A = (A_1, \dots, A_t)$ と 終点の組 $B = (B_1, \dots, B_t)$ を選んで

非交差経路 $P_i: A_i \rightarrow B$ の組 $P = (P_1, \dots, P_t)$ を考える.

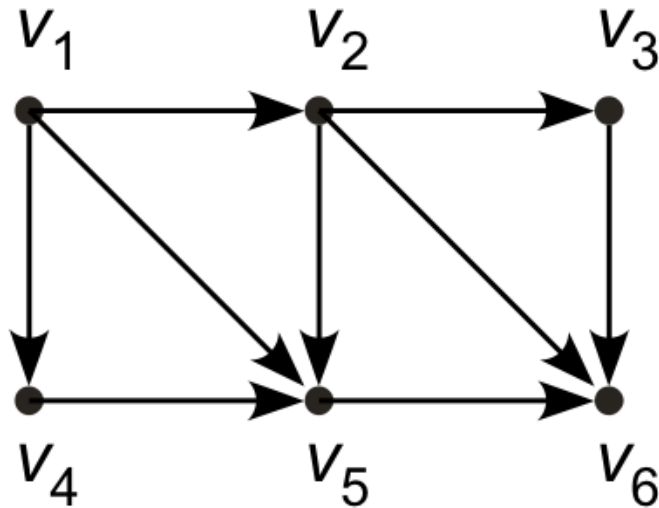
このような P の選り方の総数を $G(A, B)$ と表す

<LGV公式> 許容条件 $i < k$ かつ $j > l$ ならば A_i から B_j に至る経路と A_k から B_l に至る経路は必ず交わる

のもとで

$$G(A, B) = \det(G_{ij})_{i,j=1}^t$$

ここで G_{ij} は A_i を始点, B_j を終点とする経路の総数を表す.



$$A = (v_1, v_2), \quad B = (v_5, v_6)$$

$$G_{15} = 3, \quad G_{16} = 5$$

$$G_{25} = 1, \quad G_{26} = 3$$

LGV 公式を使う

$$G(A, B) = \begin{vmatrix} G_{15} & G_{16} \\ G_{25} & G_{26} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

直接に数えた結果と一致している。

重みつき LGV 公式

有向グラフの各辺 e に重み $w(e)$ を定める.

経路 $P = (a_0, \dots, a_n)$ の重み $w(P) = \prod_{i=1}^n w(a_{i-1}, a_i),$

経路の組 $P = (P_1, \dots, P_t)$ の重み $w(P) = \prod_{i=1}^t w(P_i)$

非公差経路和 $G(A, B) = \sum_{P \in \mathcal{P}_0(A, B)} w(P)$

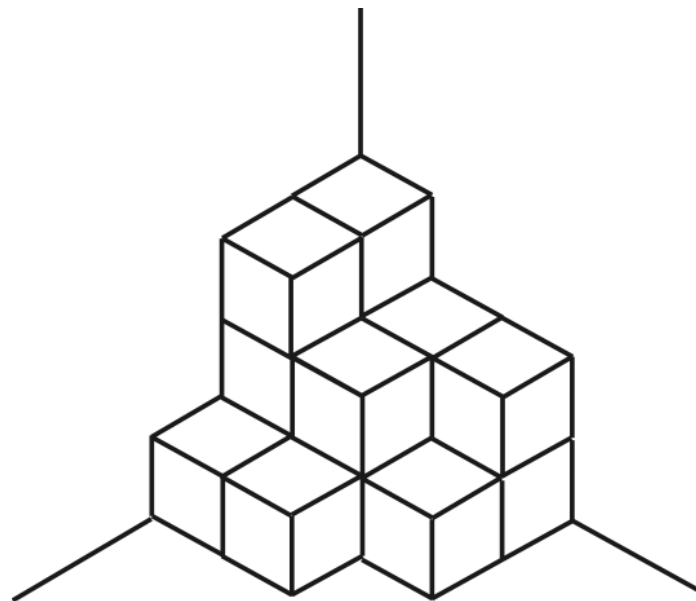
< 重みつき LGV 公式 >

$$G(A, B) = \det(G_{ij})_{i,j=1}^t, \quad G_{ij} = \sum_{P \in \mathcal{P}(a_i, b_j)} w(P)$$

3次元ヤング図形の数え上げ問題

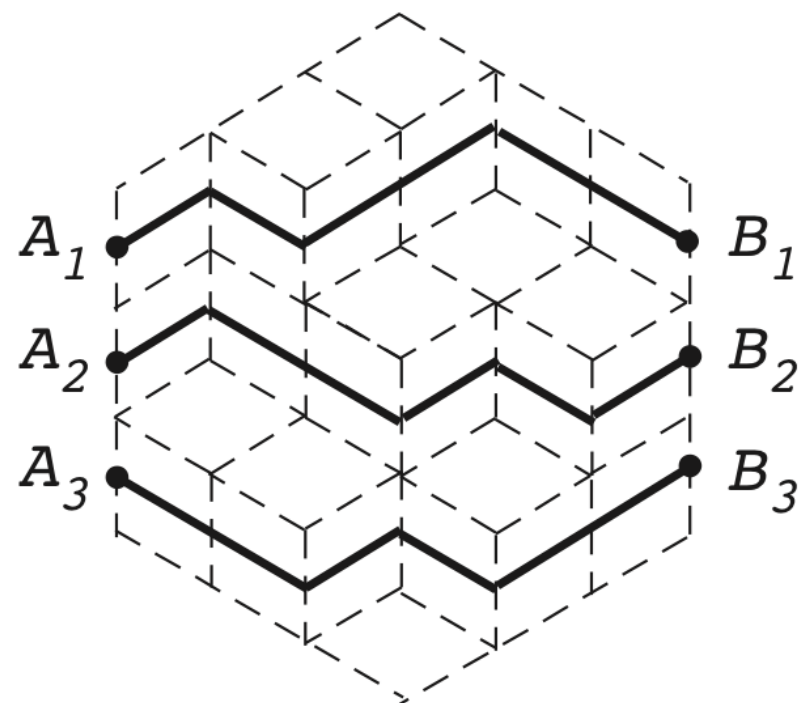
< 3次元ヤング図形 >

ヤング図形の3次元版.
 $1 \times 1 \times 1$ の単位立方体を
3次元空間の第1象限内に
積み上げてできる.



$r \times s \times t$ の直方体 $B(r, s, t)$ の内に入る3次元ヤング図形は
何通りあるか?

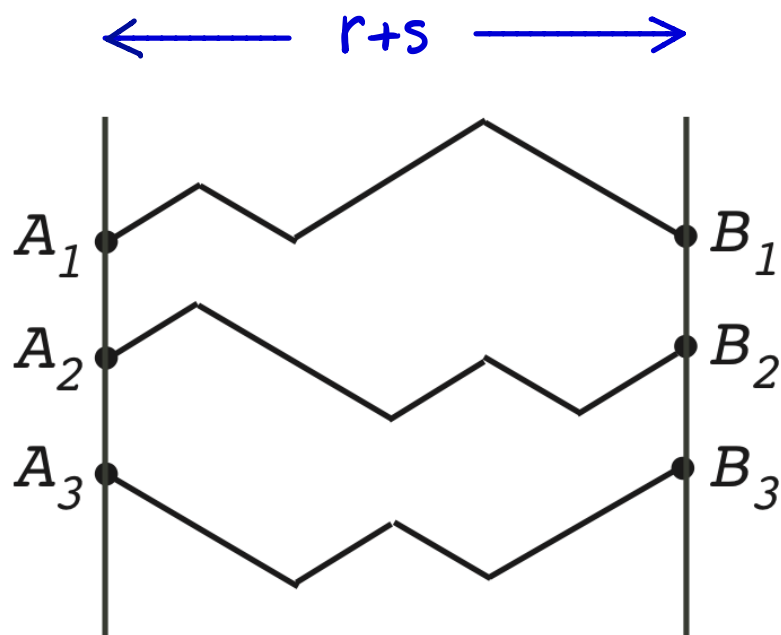
3次元ヤング図形の
各階の壁面を通る線を
斜め上から見れば、折線
の非交差経路に見える。



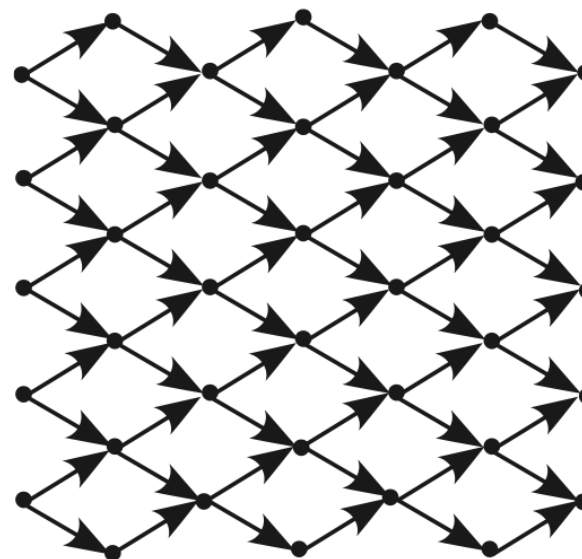
3次元ヤング図形

↔ 非交差経路
1:1

→ LGV公式が使える



経路の平面図



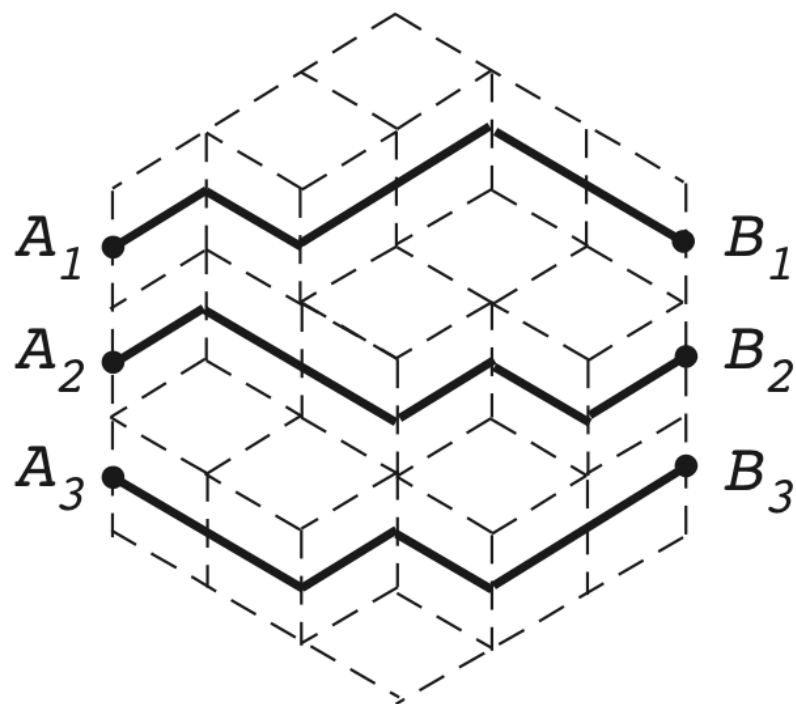
背後の有向グラフ

A_i と B_j を結ぶ経路の総数 $G_{ij} = \binom{r+s}{r+i-j} = {}_{r+s}C_{r+i-j}$

$r \times s \times t$ の箱の中の 3次元ヤング図形の総数 $N_{r,s,t}$ は
LGV 公式によって行列式の形に表せる.

$$N_{r,s,t} = \det \left(\binom{r+s}{r+i-j} \right)_{i,j=1}^t$$

< binomial determinant >



$r=s=t=3$ のとき

$$N_{3,3,3} = \begin{vmatrix} 20 & 15 & 6 \\ 15 & 20 & 15 \\ 6 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 980$$

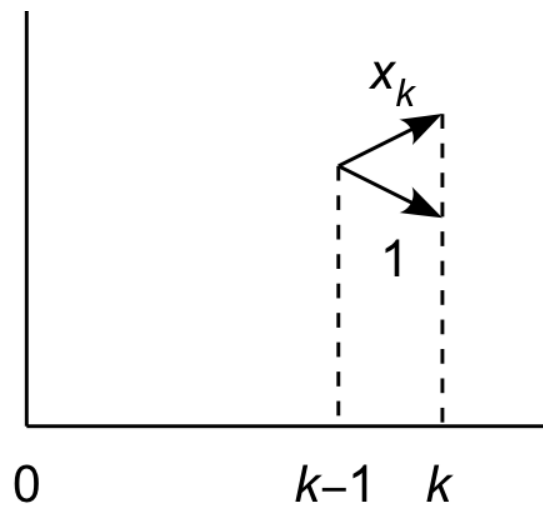
話の続き

$N_{r,s,t}$ を与える行列式の値は **シューア 函数** を用いて計算できる. それをさらに書き直すことによって, 最終的に次の**積表示**が得られる.

< MacMahon の公式 >

$$N_{r,s,t} = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^t \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

重み付けられたシュ-ア函数が現れる



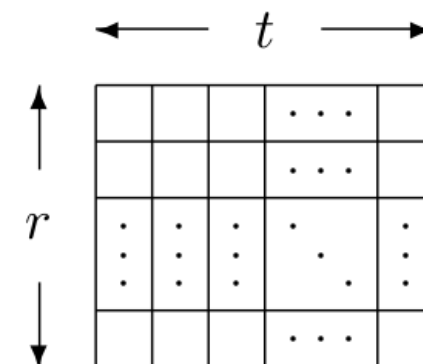
$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{r+s})$$

$$N_{r,s,t}(\mathbf{x}) = s_{(t^r)}(\mathbf{x})$$

辺に重みをつけた数え上げ母函数

$$N_{r,s,t}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{P \in \mathcal{P}_0(\mathbf{A}, \mathbf{B})} w(P)$$

は長方形のヤング図形のシュ-ア函数になる:



まとめと補足

- LGV公式 非公差経路の総数や重みつき総和を
行列式として表す。(行列式の計算は別の問題になる.)
その意味で 全域木 や 完全マッチング の数え上げ公式に似ている.

- LGV公式の応用
 - ユニダルウォーク
 - ひし形タイル張り
 - ヤング盤, シュープ関数
 - マトロイド, 全正値行列, etc

- LGV公式の限界

無閉路性, 許容条件 (平面性と関わる)

拡張や変種の試み