数理科学ビギナーズ談話会
第１回

非線形の世界
ー振り子からソリトンへー

講師
京都大学総合人間学部　高崎金久

１９９３年１０月１４日（木）
総合人間学部Ａ号館Ａ１０２号室

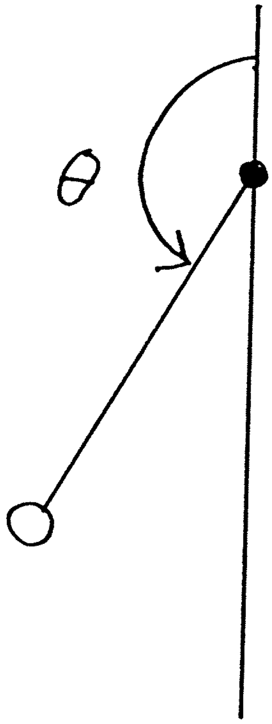
主催
京都市左京区吉田二本松町
京都大学総合人間学部
数理科学教室

（総合人間学部Ａ号館A373号室
数理基礎論講座事務室
Tel: 075-753-6735　Fax:075-753-6767）

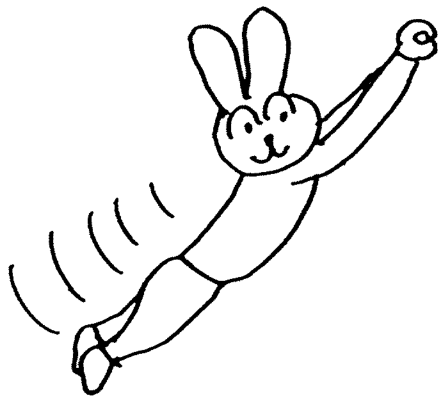
目次

2

単振り子



一方の端を固定した棒状の振り子を考える



運動方程式

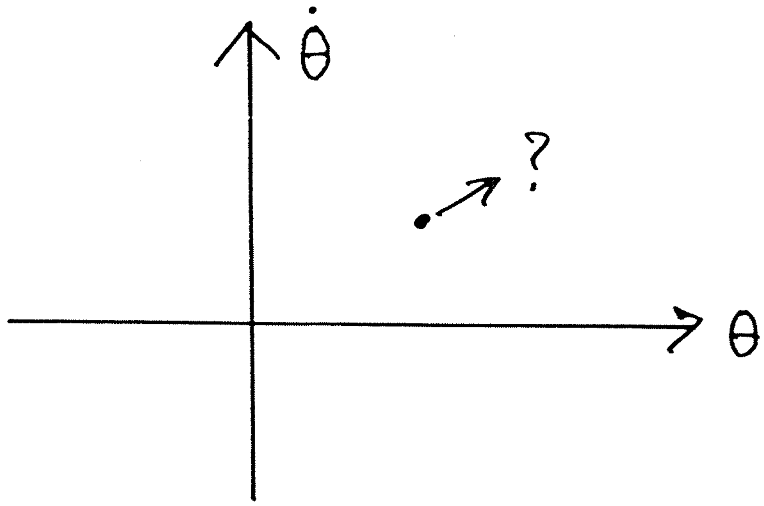
$$\ddot{\theta} = k \sin\theta$$

ここで $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$, $\ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$, …

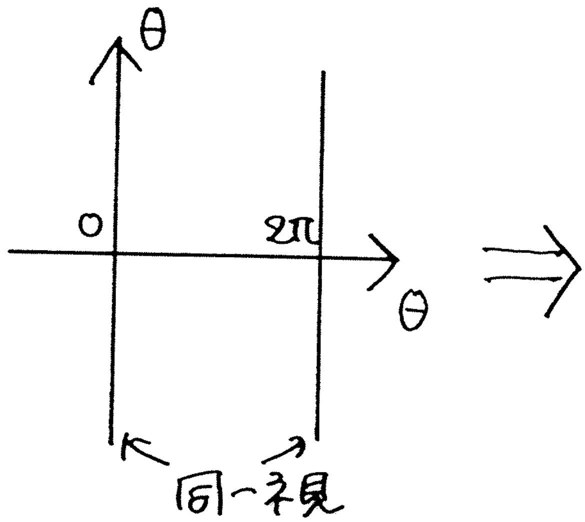
k は正定数

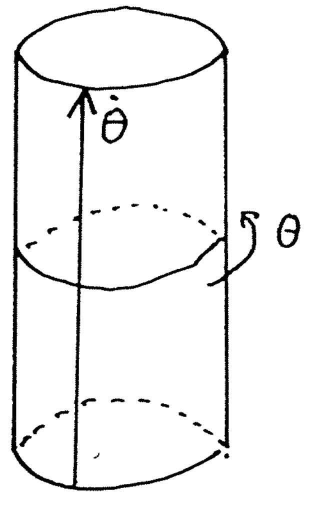
相空間で運動を見る

☆ θだけで運動を考えるよりも、$\dot{\theta}$と組にして
$(\theta, \dot{\theta})$平面（相空間）で扱う方が便利.



☆ 本当の相空間はこの平面を円筒に丸めたものである.（$(\theta, \dot{\theta})$と$(\theta+2\pi, \dot{\theta})$は振り子の状態としては同一.）





☆ 等エネルギー曲線：

運動方程式 $\ddot{\theta} = k\sin\theta$ のもとで エネルギー

$$H = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + k(\cos\theta - 1)$$

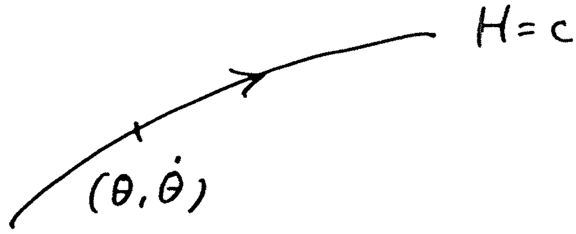
の時間変化を調べると

$$\frac{dH}{dt} = \ddot{\theta}\dot{\theta} - k\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$$

つまり運動は等エネルギー曲線

$$H = c$$

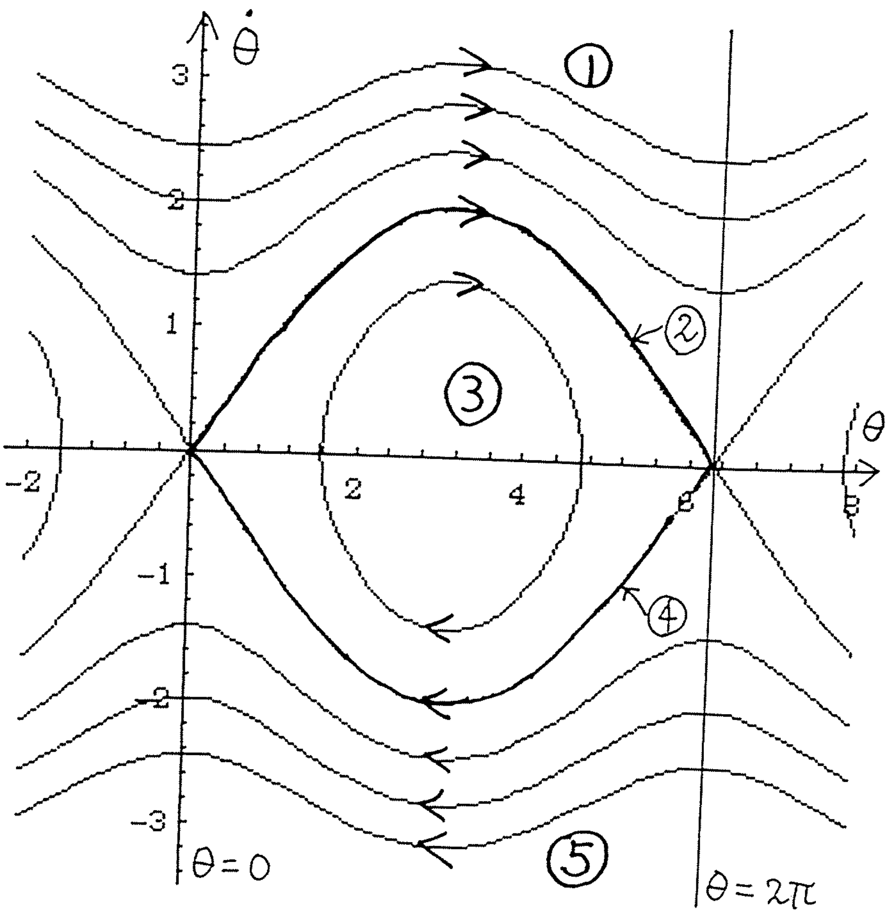
に沿って起こる。



☆ セパラトリクス：

実際に相空間中に等エネルギー曲線を描いて運動を調べてみると（次ページ），$H=0$ という曲線を境にして運動の定性的性質が変わることがわかる。一般にこのような曲線をセパラトリクスという。

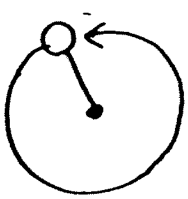
☆ $k=1$ として相空間の様子を描く：



向きをつけたものは等エネルギー曲線とそれに沿う運動を示している。

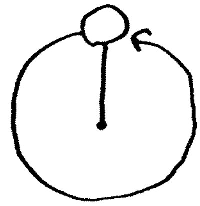
②④はセパラトリクスである。それに沿う運動は無限の過去($t=-\infty$)の倒立状態に始まり、1周して無限の未来($t=+\infty$)の倒立状態に終わる。

① $H=c>0$



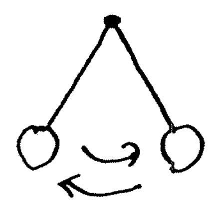
回転

② $H=0$



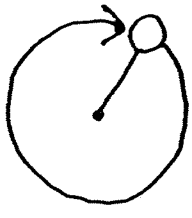
1周

③ $H=c<0$



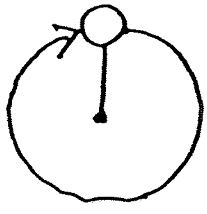
振動

⑤ $H=c>0$



回転

④ $H=0$

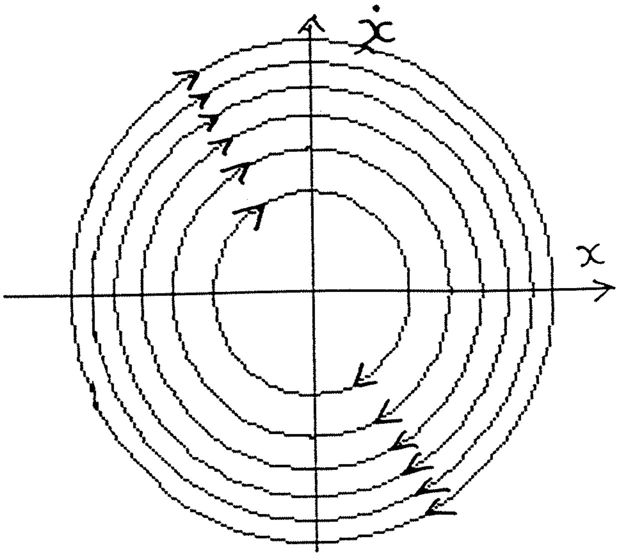


1周

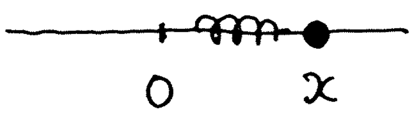
6

調和振動子との比較

調和振動子の相空間



$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$



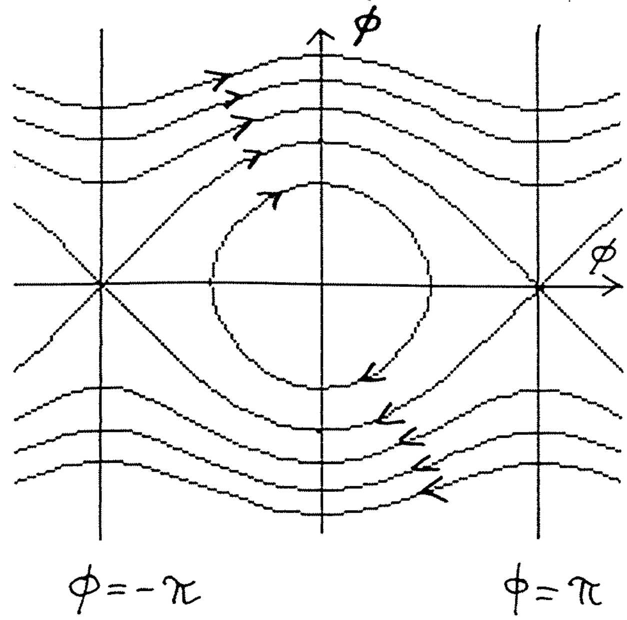
☆ セパラトリクスがない.

☆ 周期は軌道によらず一定値.

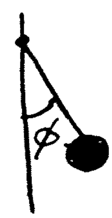
☆ 解は三角函数で書ける.

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

単振り子の相空間



$$\ddot{\phi} = -k\sin\phi$$



$(\theta = \phi + \pi)$

☆ セパラトリクスがある.

☆ 周期は軌道によって異なる.

☆ 解を書くには難しい函数（楕円函数）が必要（ただしセパラトリクス解は例外.）

☆ この違いは振り子の方程式の非線形性による.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \cdots \text{線形} \left(\begin{array}{l} x\text{とその導函数に} \\ \text{ついて1次式} \end{array} \right)$$

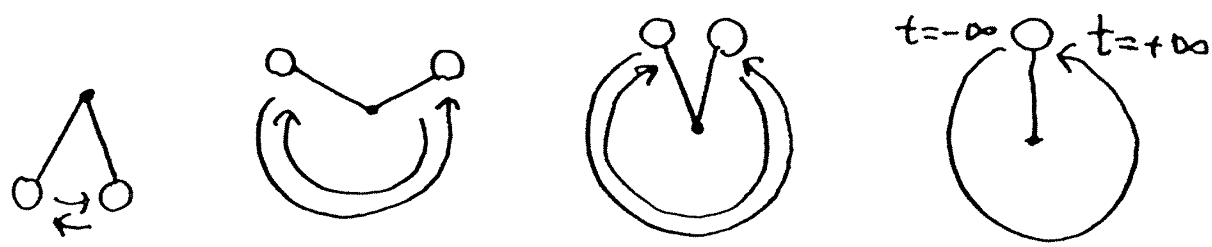
$$\ddot{\phi} = -k\sin\phi \quad \cdots \text{非線形}$$

☆ 振幅が小さいと振り子は調和振動子で近似できる

$$\sin\phi = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 - \cdots$$

$$\fallingdotseq \phi \quad (|\phi|\text{が小さいとき})$$

☆ 振幅が大きいと非線形性が効いて来る



周期が長くなる

周期 ∞

(セパラトリクス解)

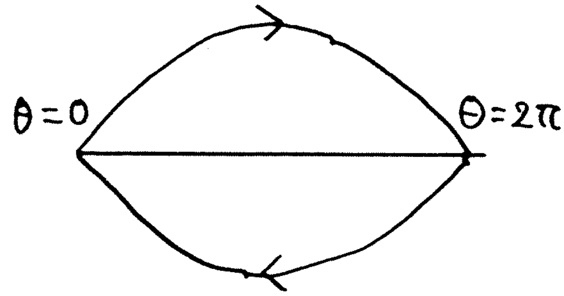
セパラトリクス解を求めてみよう

$$H = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \cos\theta - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot{\theta}^2 = 2(1-\cos\theta) = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot{\theta} = \pm 2\sin\frac{\theta}{2}$$

(± それぞれが 2つの
セパラトリクスに対応する)



☆ この方程式は変数分離法によって解ける:

$$t + 定数 = \pm\int\frac{d\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

右辺の不定積分は具体的に実行できる:

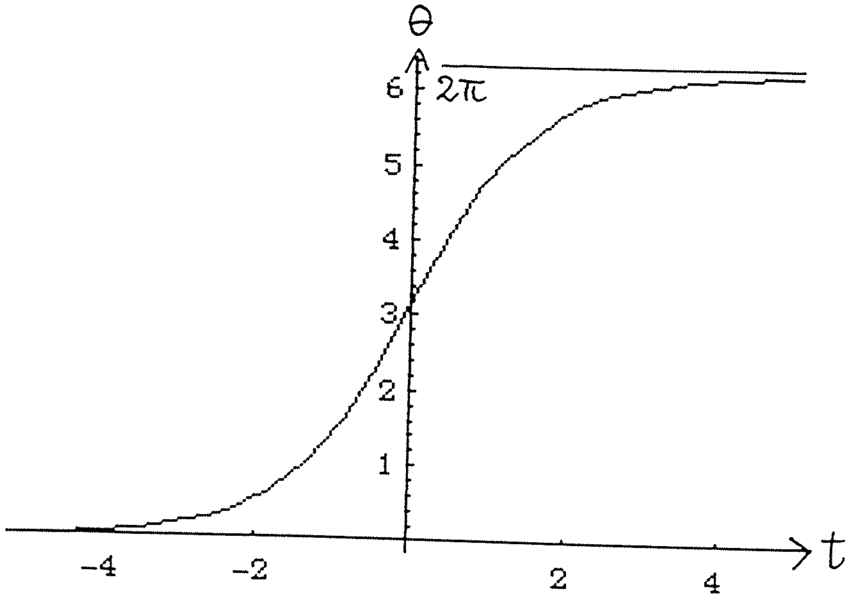
$$\int\frac{d\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \log\tan\frac{\theta}{4} + 定数.$$

(演習問題 — これを確かめよ)

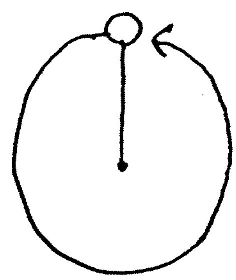
$t = t_0$ で $\theta = 0$ となるように積分定数を合わせると、結局 セパラトリクス解は次のように書ける:

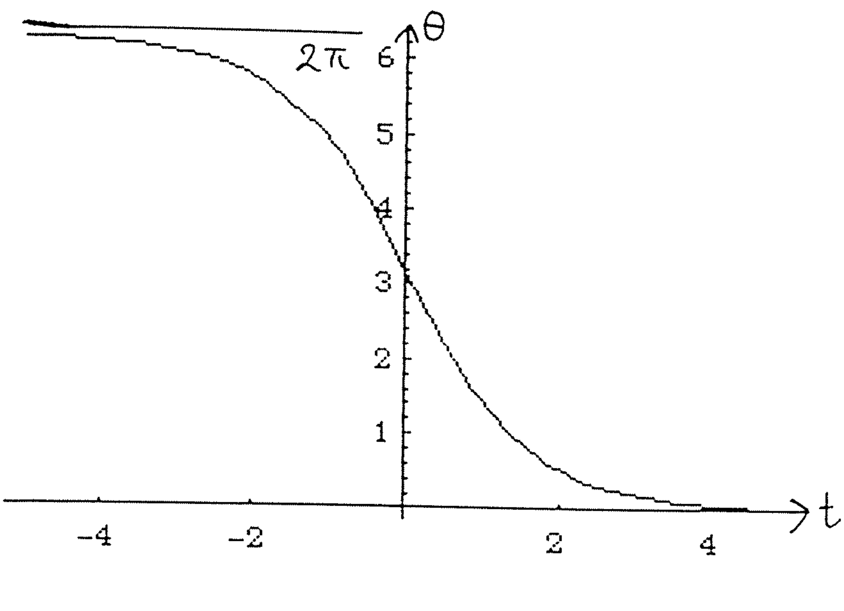
$$\theta = 4\arctan\left(e^{\pm(t-t_0)}\right).$$

☆ <u>$t_0 = 0$ としてグラフを描くと次の図のようになる:</u>

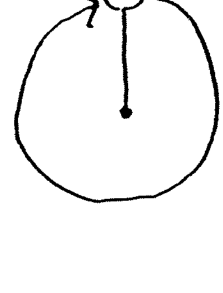


$\theta = 4\arctan(e^{t})$

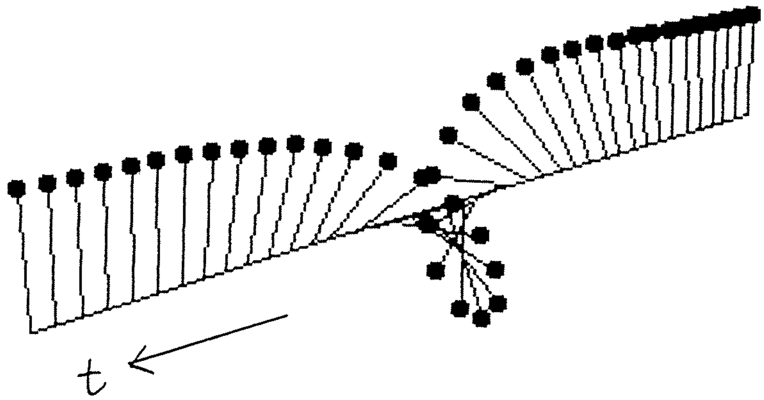




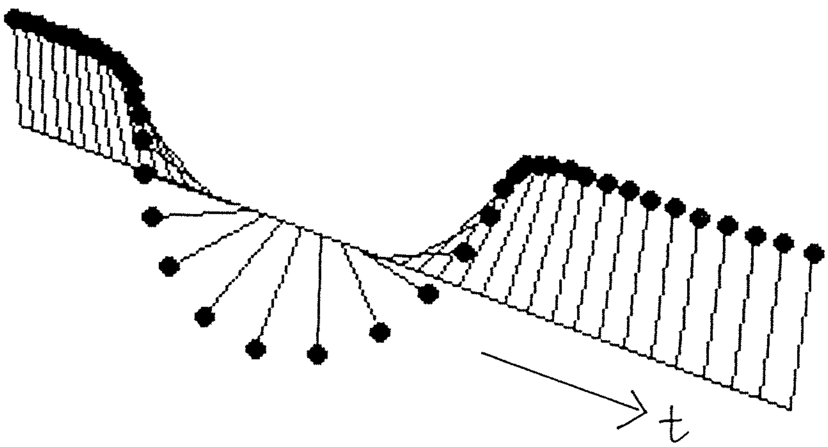
$\theta = 4\arctan(e^{-t})$



☆ 振り子の位置を立体的に描くと次のような図が得られる:



時間の進行に合わせて振り子の固定点の位置をずらしてある.

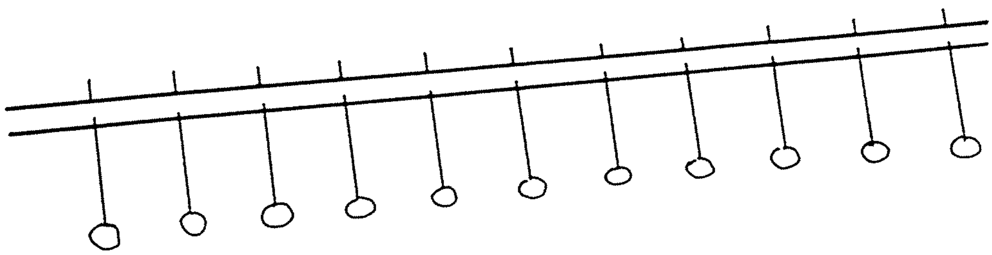


見る角度を変えてみた.

— 実はこの図の中にソリトンが現れている.

サイン・ゴルドン方程式

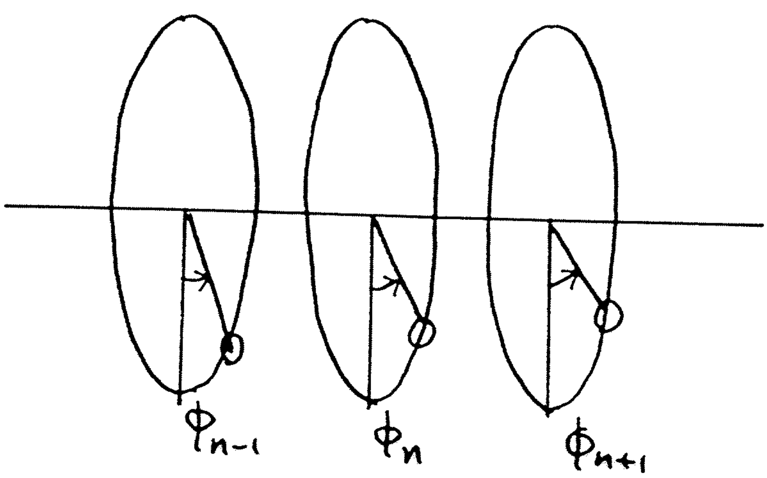
☆ ゴムひもに等間隔にマチ針を刺したおもちゃ



少し練習するとソリトン（キンク・反キンク）が伝わるのを見られるそうである.

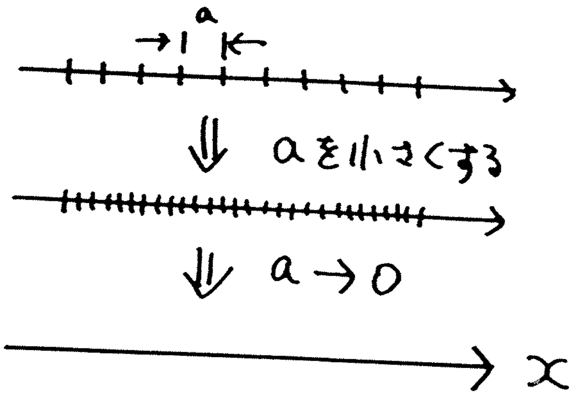
☆ 力学的模型としては，これはねじればねで結合された連成振り子と考えることができる.
その運動方程式は次のようになる：

$$I\ddot{\phi}_n = -T\sin\phi_n + K(\phi_{n+1}+\phi_{n-1}-2\phi_n).$$



（I, T, K は正定数）

☆ 振り子の固定点の間隔を a として $a \to 0$ の極限（連続体極限）を考える.



n 番目の振り子の固定端の位置： $x = na$

$$\phi_n(t) \to \phi(t, x)$$

$$\phi_{n\pm1}(t) \to \phi(t, x \pm a)$$

テイラー展開により

$$\phi_{n\pm1} - \phi_n \to \phi(t, x\pm a) - \phi(t, x)$$
$$= \phi(t,x)_x \, a + O(a^2).$$

$$\phi_{n+1} + \phi_{n-1} - 2\phi_n$$
$$\to \phi(t, x+a) + \phi(t, x-a) - 2\phi(t,x)$$
$$= \phi(t,x)_{xx} \, a^2 + O(a^3).$$

$$\left(\text{ここで, } \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \cdots \right)$$

これらの表示をもとの方程式に代入し、I, T, K という定数を適当に調節して $a \to 0$ の極限をとると、次の偏微分方程式（サイン・ゴルドン方程式）を得る。

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = 0$$

☆ サイン・ゴルドン方程式はキンクや反キンクと呼ばれるソリトン解をもつ。その他にも数学的に興味ある性質を種々備えている。（いわゆる非線形可積分系のひとつ。）

物理的にも、高エネルギー物理や物性物理にしばしば登場する重要な模型である。

14

静止したソリトン解

☆ ϕ が t によらないとすると，サイン・ゴルドン方程式は

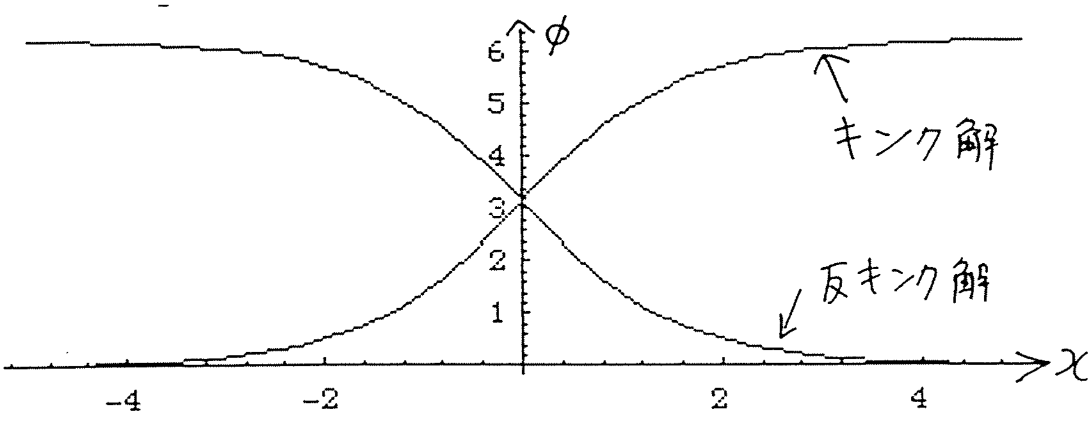
$$\phi_{xx} = \sin\phi$$

となる. これは　$x \to t$,　$\phi \to \theta$　というように読みかえれば単振り子の方程式に他ならない。

特に，単振り子の ~~パラメトリクス~~ セパラトリクス 解からサイン・ゴルドン方程式の次の解を得る.

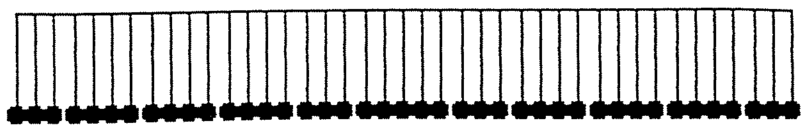
$$\phi = 4\arctan\left(e^{\pm(x-x_0)}\right).$$

＋の方をキンク，−の方を反キンクと呼ぶ.

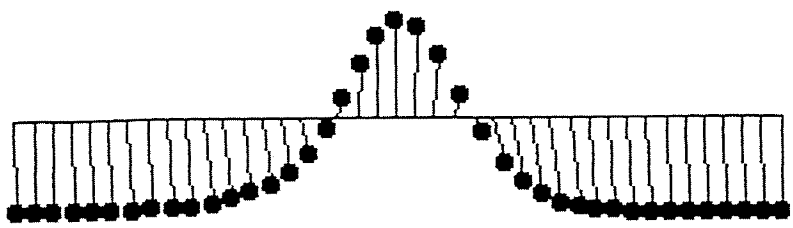


15

☆ ゴムひもとマチ針の模型では、この解は片方の端を1回ひねった状態に相当する。

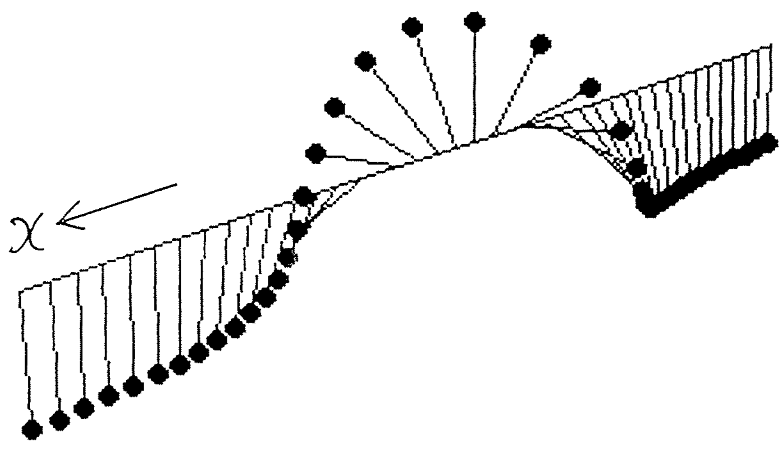


ひとひねりすると…



…こうなる

単振り子のθとこの模型のϕは $\theta = \phi + \pi$ の関係にあるので、立体的に描いてみるとセパラトリクス解のストロボ像とは上下さかさまになっている。



左図：キンク解のあらわす状態を描いてみた。

進行するソリトン解

☆ サイン・ゴルドン方程式は 2次元時空のローレンツ変換 $(x,t) \to (x',t')$,

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}} + a,$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}} + b$$

(a, b, v は定数, $|v| < 1$) によって不変である.

実際, ϕ を (x,t), (x',t') それぞれの函数とみるとき

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = \phi_{t't'} - \phi_{x'x'} + \sin\phi$$

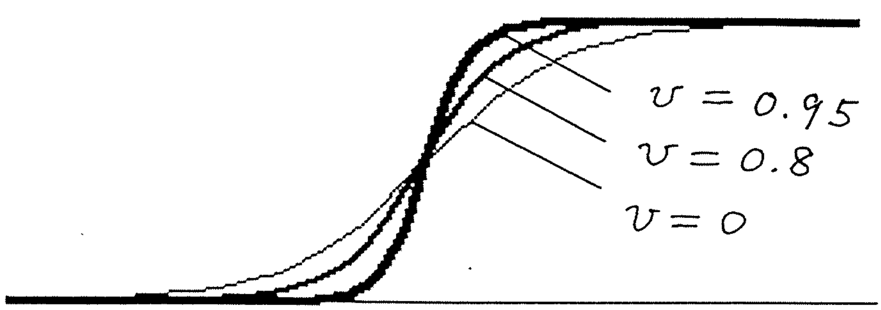
となっている. (演習問題: これを確かめよ.)

☆ 従って (x',t') で静止したソリトン解から速度 v で進行するソリトン解がただちに求められる:

速度 v で進行するソリトン解（キンク・反キンク）：

$$\phi = 4 \arctan \exp\left(\pm \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}} \right).$$

☆ 進行するソリトン解は静止したソリトン解に比べて幅が狭い。v が ± 1 に近づくにつれて幅はどんどん狭くなって行く。



v の値を変えてキンク解のプロフィールを重ねてみた図.

これはアインシュタインの特殊相対論の有名なローレンツ収縮を反映している.（今は4次元時空のかわりに2次元時空で考えているのだが.）

ソリトン解のエネルギー密度

☆ サイン・ゴルドン方程式の解は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\phi_t^2 + \frac{1}{2}\phi_x^2 + 1 - \cos\phi$$

というエネルギー密度をもつ．全エネルギーは

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\, dx$$

で与えられる．ソリトン解に対して $\mathcal{H}$ を計算すると

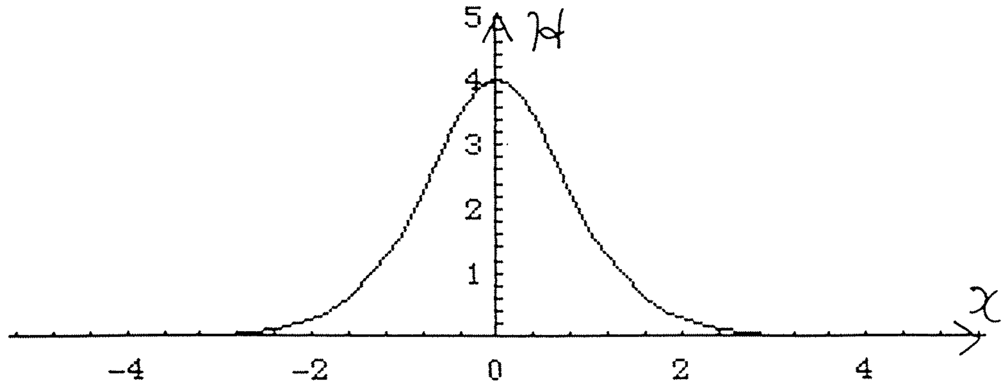
$$\mathcal{H} = \frac{4}{(1-v^2)\cosh^2\left(\dfrac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)}$$

となり，$x = x_0 + vt$ 付近に高いピークをもつ函数であることがわかる．つまりソリトン解のエネルギーはこの点の付近に集中し，それが速度 v で移動する．

このことを $v=0$ のときに見ておこう．$v=0$ のときは

$$\mathcal{H} = \frac{4}{\cosh^2(x - x_0)}.$$

グラフは次のようになる．（$x_0=0$ とした．）



これは水面波の方程式として有名なKdV（コルテヴェーグ・ドフリーズ）方程式のソリトン解と同じ波形をしている．

☆ サイン・ゴルドン方程式にはこの他にも複数のキンク・反キンクが共存する解など様々なおもしろい解がある．そこでは単振り子との関係は失われるが，代わりに非線形可積分系を扱ういろいろな数学的技法が使える．

まとめ

☆ 振り子は非線形系である.（調和振動子との違い）

☆ 単振り子のセパラトリクス解は初等関数で書ける.

☆ ねじればねで結ばれた連成振り子系は連続体極限でサイン・ゴルドン方程式により記述される.

☆ 単振り子のセパラトリクス解からサイン・ゴルドン方程式の静止したソリトン解が得られる.
（「振り子からソリトンへ」!）さらに静止したソリトン解からローレンツ変換によって進行するソリトン解が得られる.

☆ ソリトン解のエネルギーはある狭い領域に集中している. エネルギー密度の関数形はKdV方程式のソリトン解と同じような形をしている.

○ さらに深く勉強したい人には次の文献を読むことをすすめる。

- 和達三樹，「非線形波動」，(岩波講座 現代の物理学 No. 14)
- 戸田盛和，「非線形波動とソリトン」(日本評論社，1983)

○ 振り子は「カオス」へのルートの出発点でもある。実際，$a \to 0$ の極限をとる前の連成振り子系は実はカオス的振舞いをすることが知られている。また周期的外力の加わった振り子

$$\ddot{\theta} = k \sin\theta + f(t),$$
$$f(t+\omega) = f(t),$$

もカオス状態へ移行して行く。