

# ソリトンの さまざまな顔

理学科数学コース 高崎金久

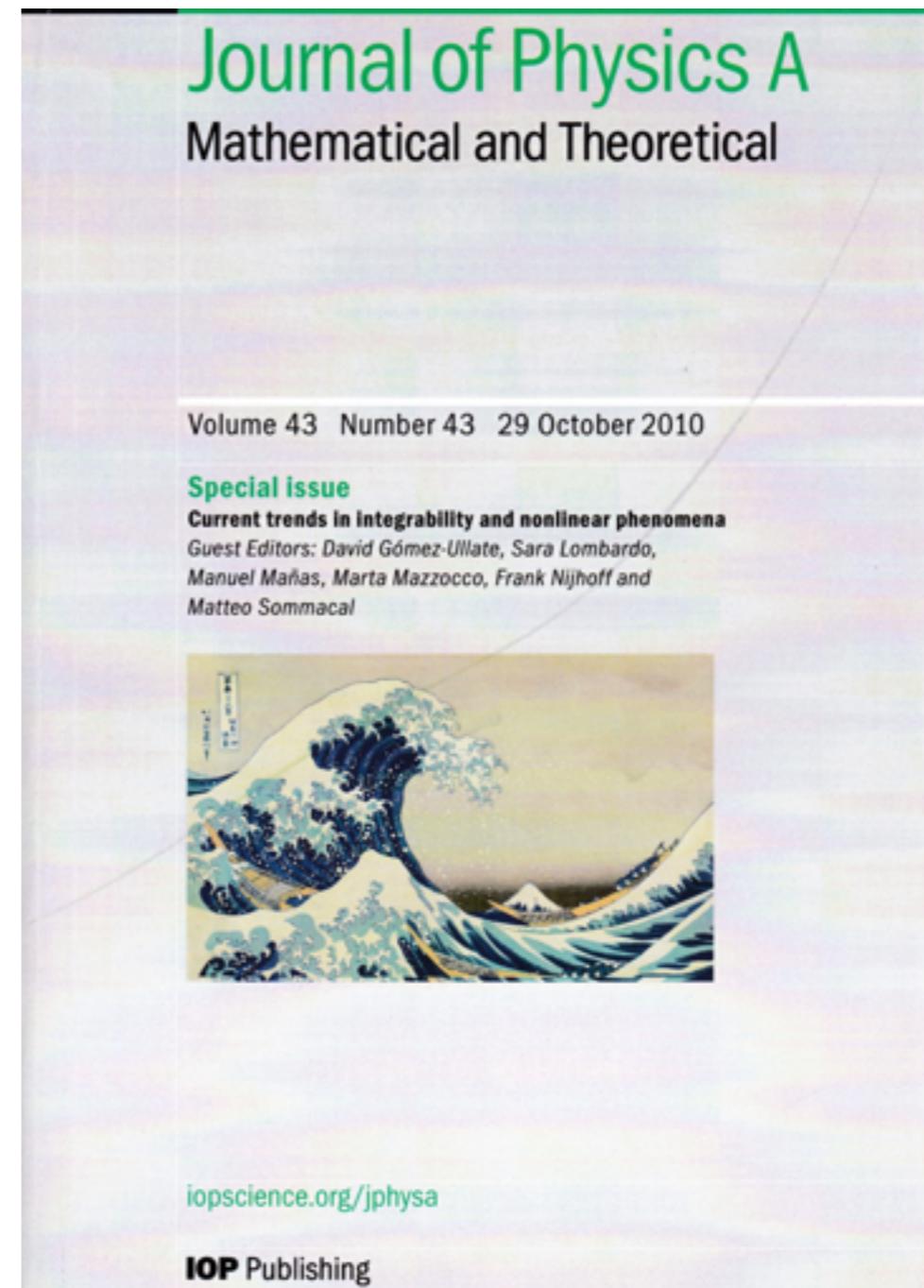
非線形波動の一種である「ソリトン」について,  
なるべく数式を使わずに解説する. 簡単な問題  
演習も行う.

# 葛飾北斎 富嶽三十六景 神奈川沖浪裏



3種類の代表的な非線形現象（ソリトン, カオス, フラクタル）を象徴する絵として、世界中の研究者に親しまれている。

## 北斎の図版を利用している本・論文集の例

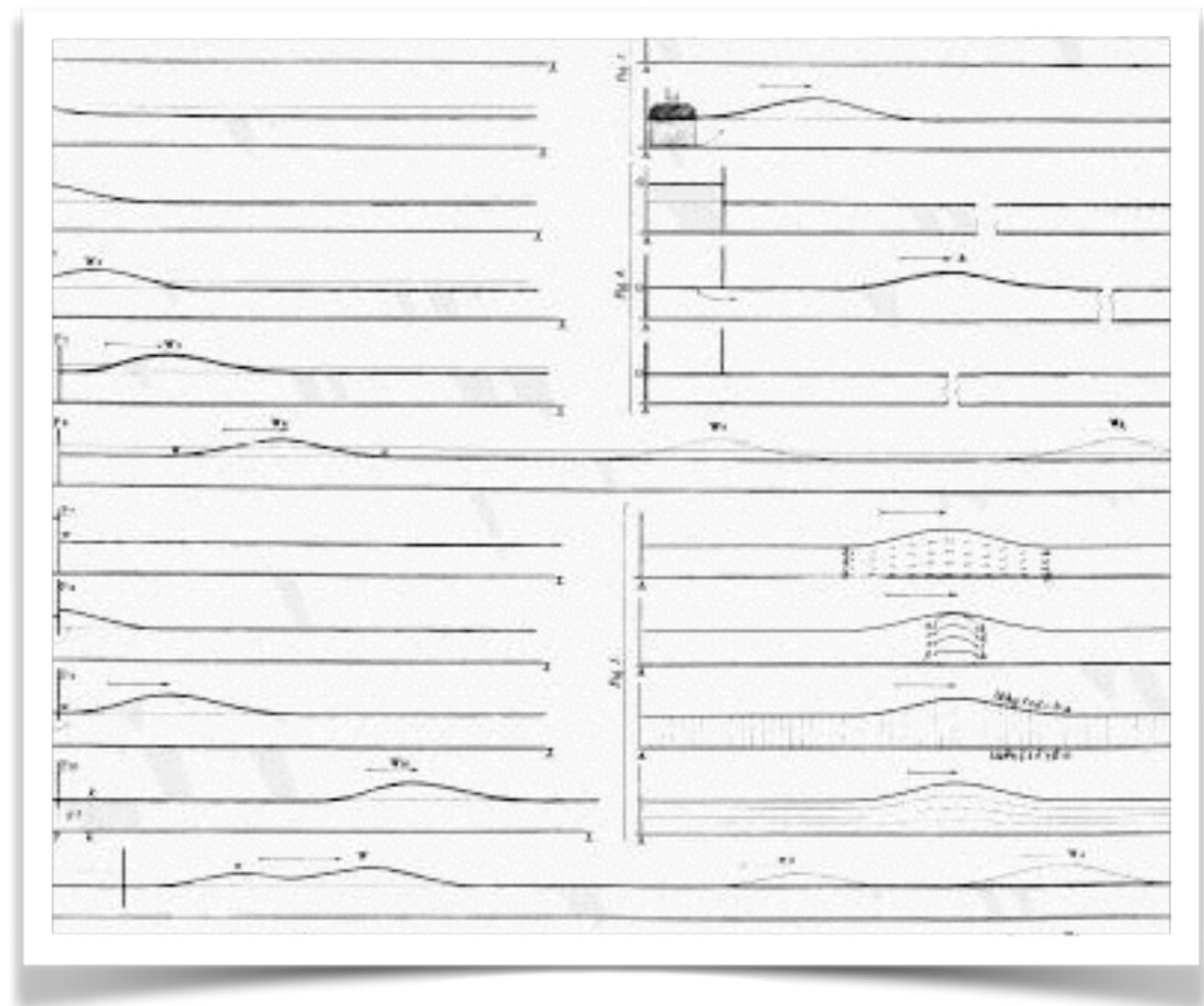


# ソリトン

ソリトンの研究は19世紀前半にまで遡る。その頃、造船技術者スコット-ラッセル (John Scott-Russel) が運河を一定の形と速度で伝わる山形の孤立波に興味を持ち、水槽で実験を行って、波の高さと速度の関係を表す実験式を得た。



(右：スコット-ラッセルが実験の説明に用いた図版)



## ソリトン

スコット-ラッセルの観察や実験の結果を説明する理論的な方程式として、19世紀末までに「ブシネ方程式」や「KdV方程式」などが提案されたが、当時はこのような非線形偏微分方程式を扱う数学的手法が未発達だった。

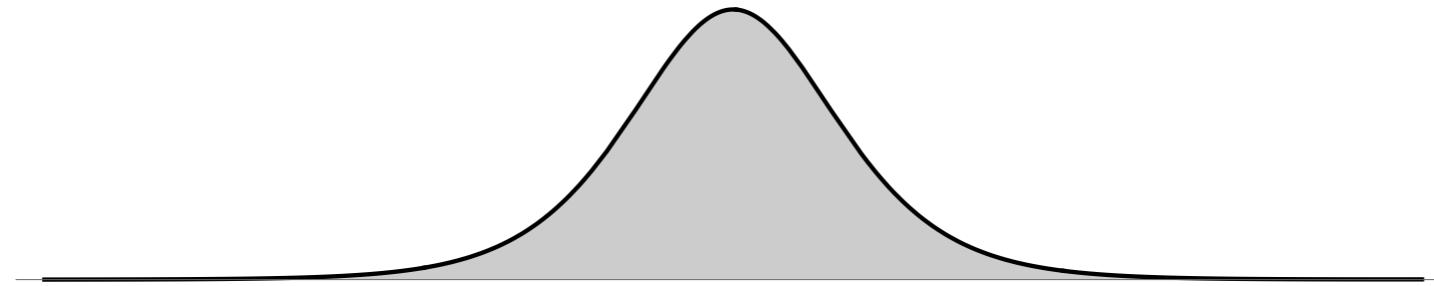
### KdV方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + 6u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}u(t, x) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}u(t, x) = 0$$

$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$  という略記法も用いられる。  
 $u(t, x)$  は時刻  $t$ , 座標  $x$  における水面の高さを表す。  
左辺の第2項  $6uu_x$  は非線形性をもつ項である。

## ソリトン

1960年代後半に、非線形格子振動というまったく別の方  
向からこれらの方程式に関心が集まり、コンピュータに  
による数値実験で孤立波の興味深い振る舞いが明らかになっ  
て、これらの孤立波は「ソリトン」と命名された。



KdV方程式のソリトンの波形（上）とその数式（下）

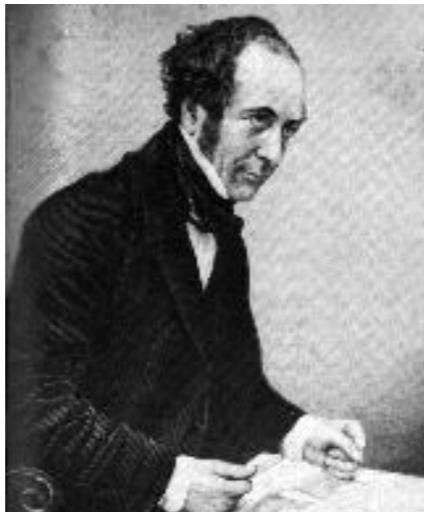
$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(k(x - ct) + \delta), \quad c = 4k^2$$

# スコット-ラッセル

インターネット上の紹介サイト ([http://www.macs.hw.ac.uk/~chris/scott\\_russell.html](http://www.macs.hw.ac.uk/~chris/scott_russell.html))

## Department of Mathematics

### John Scott Russell and the solitary wave



Over one hundred and fifty years ago, while conducting experiments to determine the most efficient design for canal boats, a young Scottish engineer named John Scott Russell (1808-1882) made a remarkable scientific discovery. As he described it in his "Report on Waves": (Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844 (London 1845), pp 311-390, Plates XLVII-LVII). (以下略)



この後に、Scott-Russel自身の言葉で、スコットランドの運河で孤立波を目撃して馬に乗ってそれを追いかけた、という逸話(1834年)が語られている。

# 孤立波目撃の再現実験

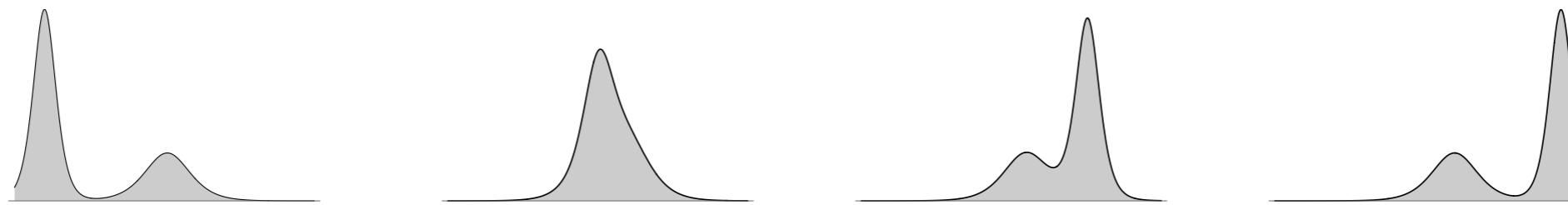
1995年7月に、非線形波動の国際会議における余興として、Scott-Russelの孤立波目撃の再現実験が行われた。



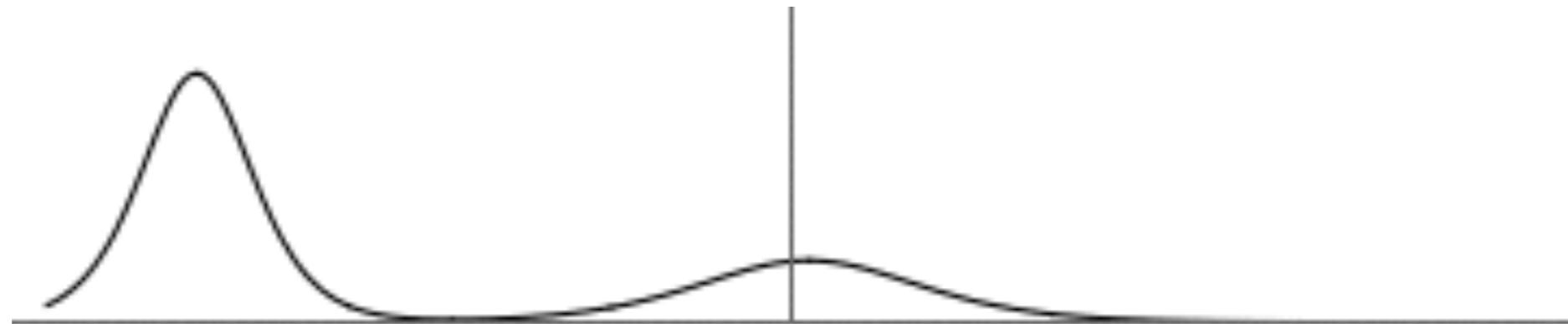
ボートの先端から孤立波が離れて、運河を進んで行く。

## ソリトンの特徴

ソリトン (soliton) は安定で、複数のソリトンが互いに衝突しても、また分かれて個性を保ち続ける、という意味で**粒子性**をもつ。（「**オン**」は粒子性を表す語尾である。例：電子=electron）



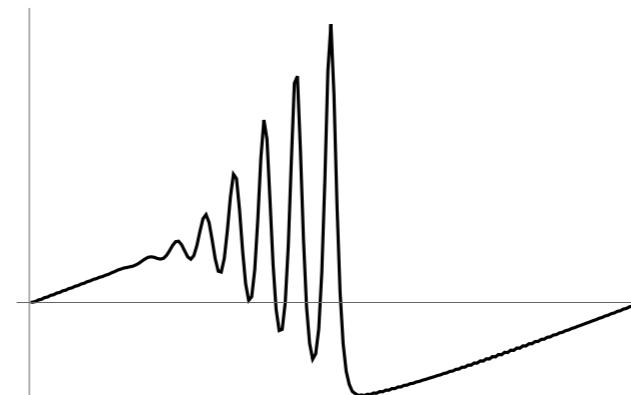
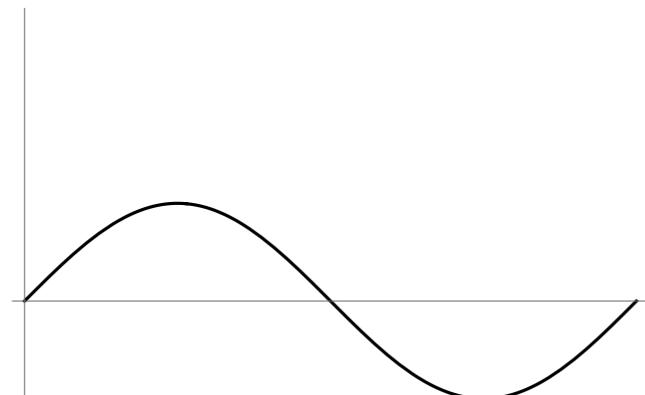
2個のソリトンの衝突（左から右へ時間が進む）



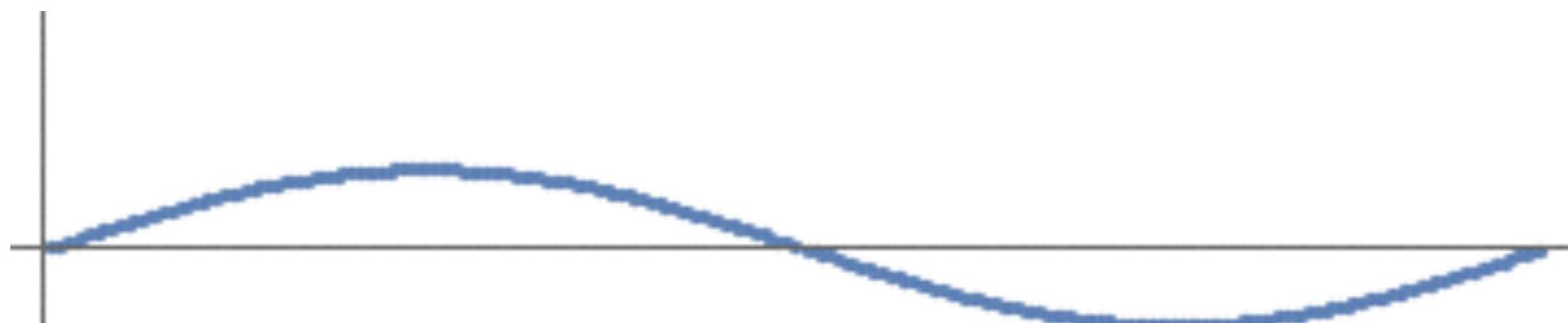
2個のソリトンの衝突（動画）

# 正弦波からソリトンの列が現れる

1960年代のコンピュータによる数値実験で、正弦波は不安定で、ソリトンの列に変わって行くことが示された。



正弦波（左）からソリトンの列（右）が出現する



ソリトンの列の出現（動画）

## 川を遡る津波からソリトンの列が現れる

津波のような波長の長い波が細長い水路に入れば、同様のソリトンの列が出現する。このことは最近、現実の河川でも目撃された。

[ウェザーニュース (<http://weathernews.jp/s/topics/201611/220245/>) より抜粋]

2016/11/22 14:40 ウェザーニュース

22日5時59分頃、福島県沖でマグニチュード7.4の大きな地震が発生しました。この地震で津波が発生、午前8時10分までに太平洋沿岸には最大で1.4mの津波が観測されています。

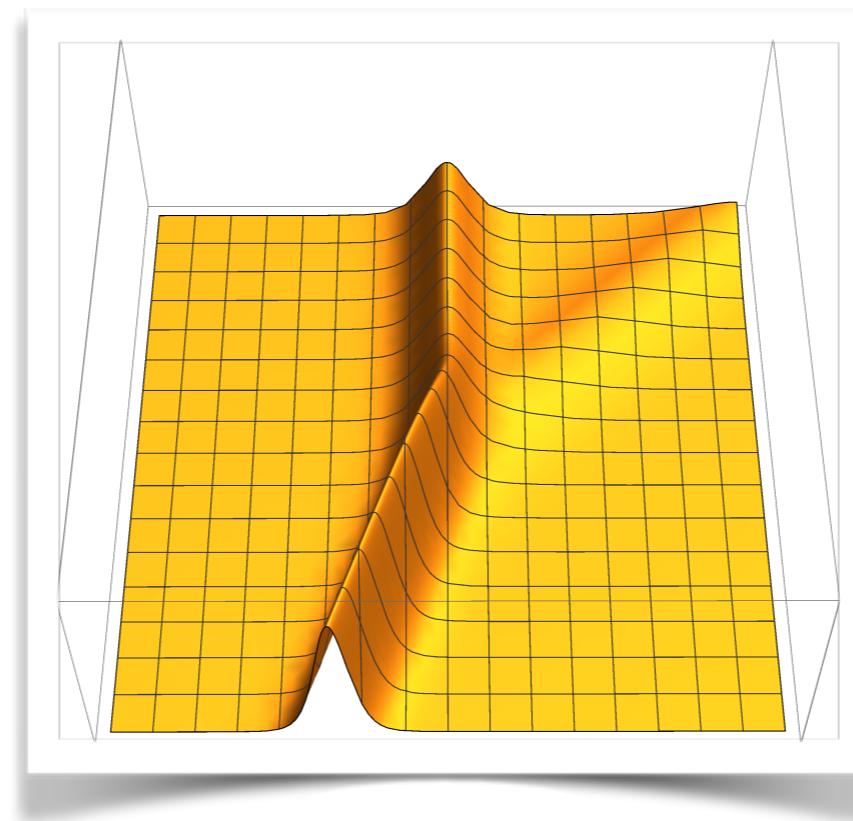
(中略)

この津波が川をさかのぼる様子を、宮城県の会員からウェザーリポートがとらえていました。



## 2次元空間のソリトン

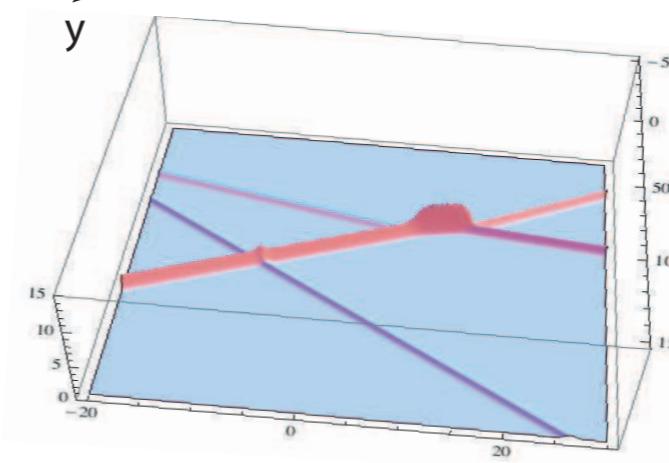
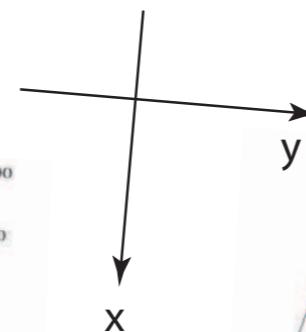
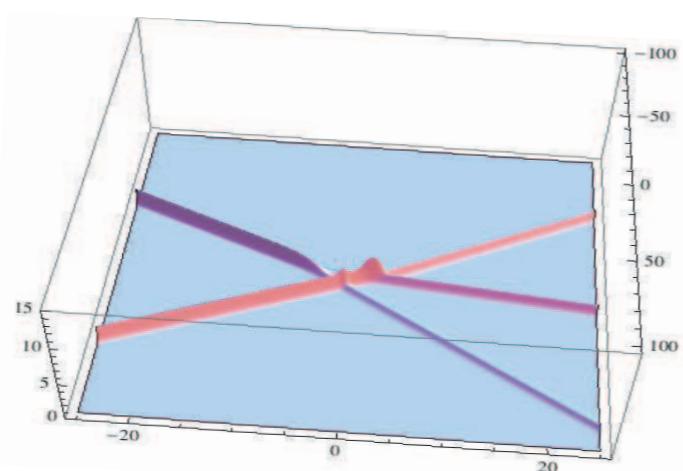
KdV方程式は運河のような1次元空間の非線形波動を記述する方程式だが、海面のように2次元的に広がった水面の非線形波動を記述する方程式もある。その代表的な例である**KP方程式**（別名**2次元KdV方程式**）は**2次元的なソリトン解**を持つ。これは直線的に伸びる波面をもち、海岸などで観察される波によく似ている。



KP方程式のソリトンの例（2-1型ソリトン）

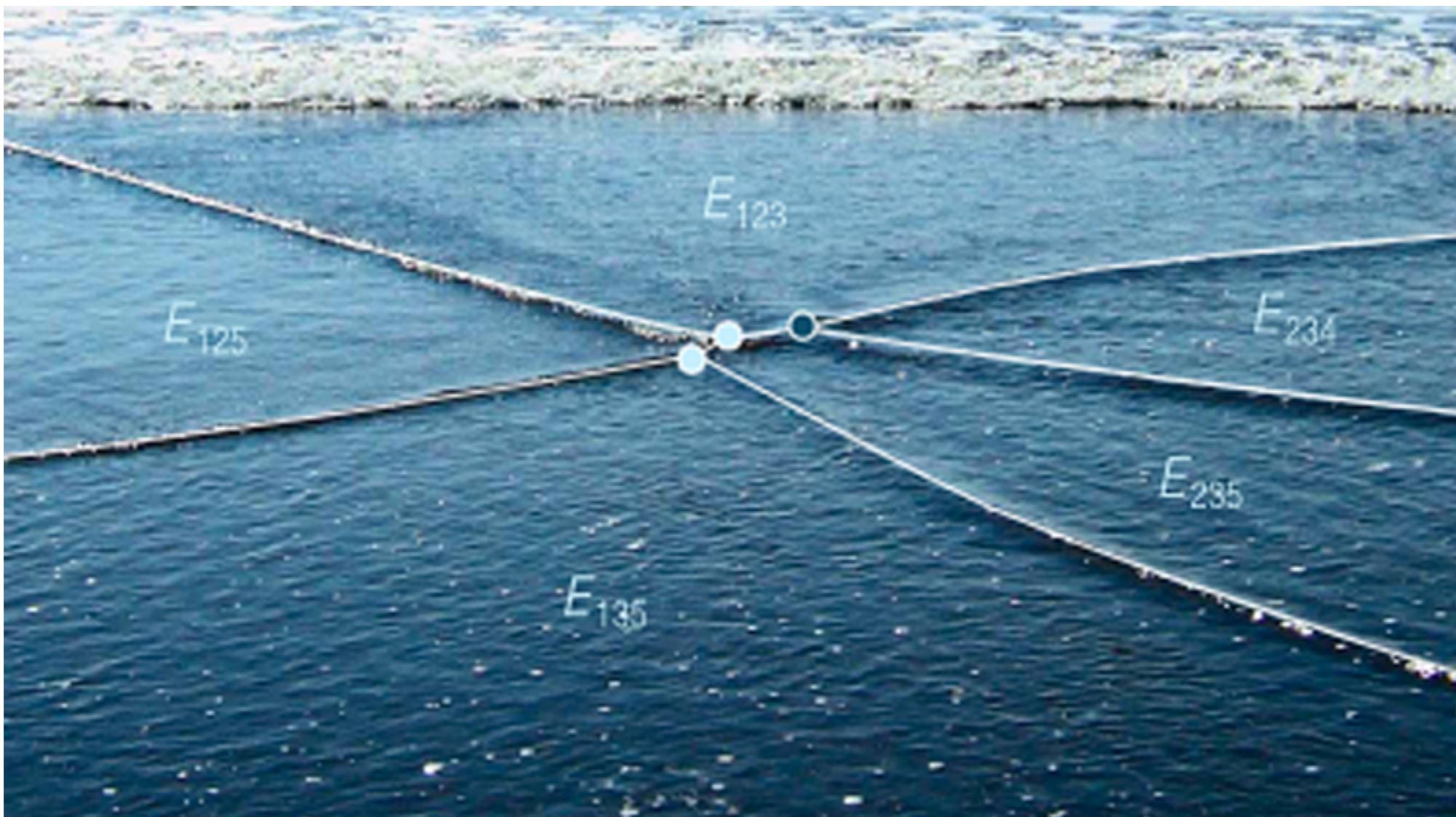
## 2次元空間のソリトン

Example 7 : Real water waves and the corresponding KP exact solution: This is (24153)-type solution of  $Gr^+(3, 5)$ .



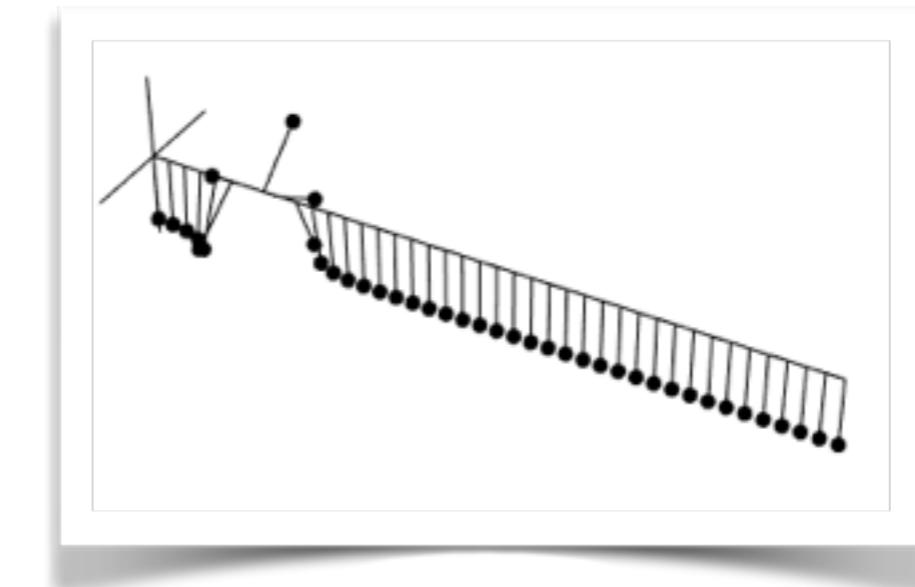
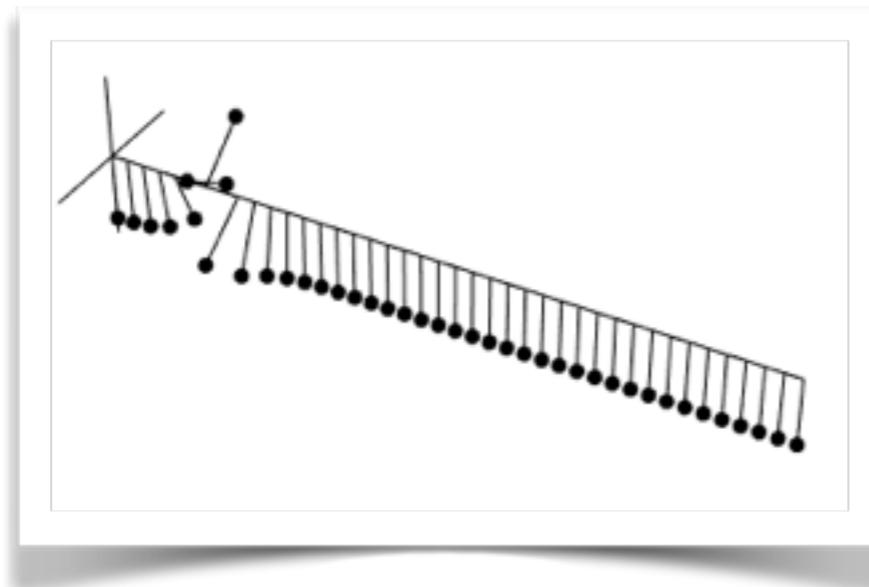
Y. Kodama “Real Grassmannian and KP solitons” (2012年10月名大講義資料)より抜粋

## 2次元空間のソリトン



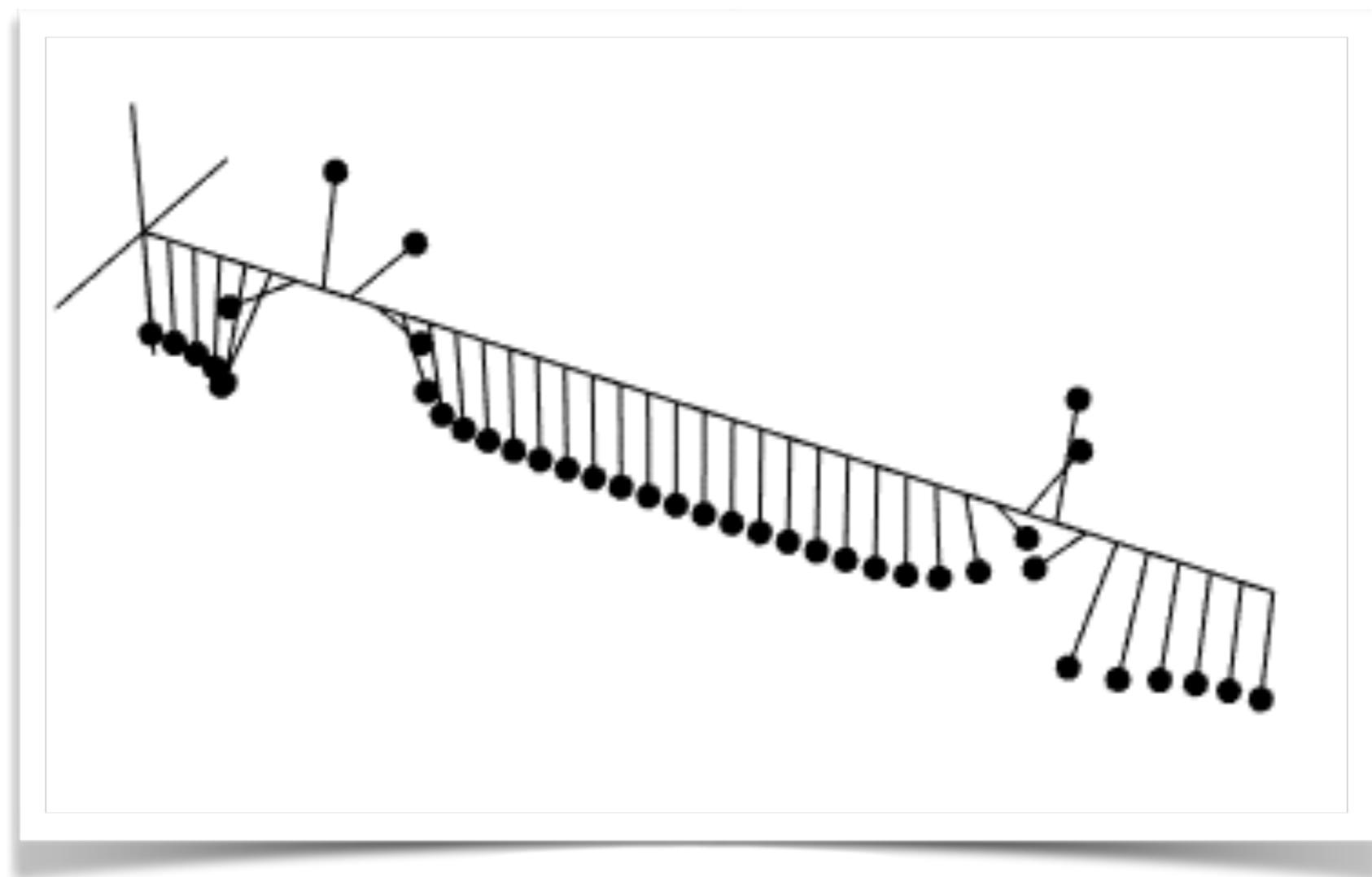
## ゴム紐と待針でできるソリトン

ソリトンが現れるのは水面の波だけではない。長年の研究によって、非線形現象のさまざまなモデル方程式に対してソリトンが知られている。その例として、ねじれ弾性をもつ線状の材質に短い間隔で振り子を取り付けた連成振り子（ゴム紐に待針を刺したものを考えればよい）がある。振り子の間隔が0に近づく極限で、この系はサイン-ゴルトン方程式という非線形偏微分方程式になる。この方程式はキンクと反キンクという2種類の基本的なソリトンを持つ。



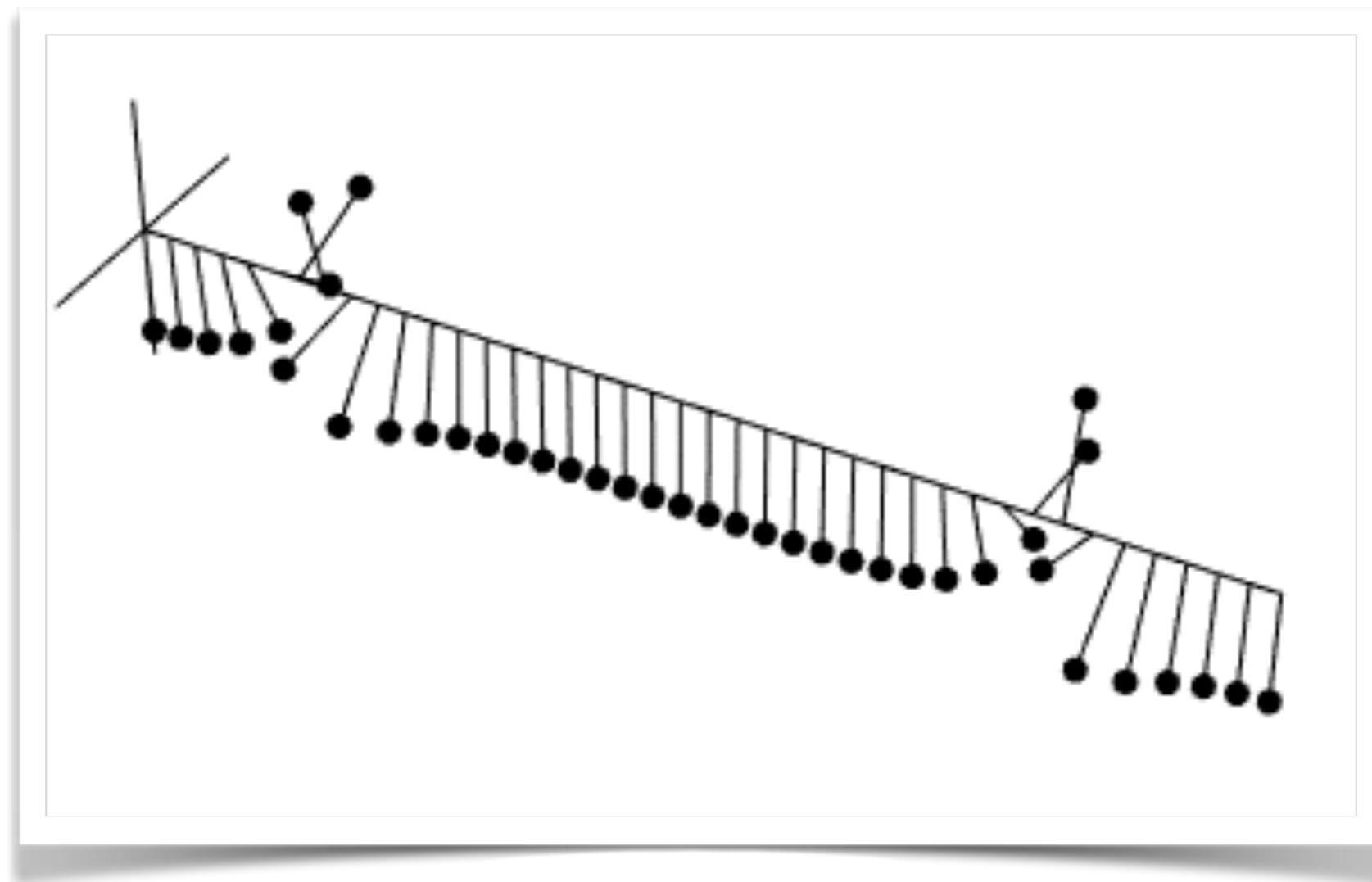
サイン-ゴルトン方程式のキンクと反キンク(動画)

## ゴム紐と待針でできるソリトン



キンクと反キンクの衝突（動画）

## ゴム紐と待針でできるソリトン

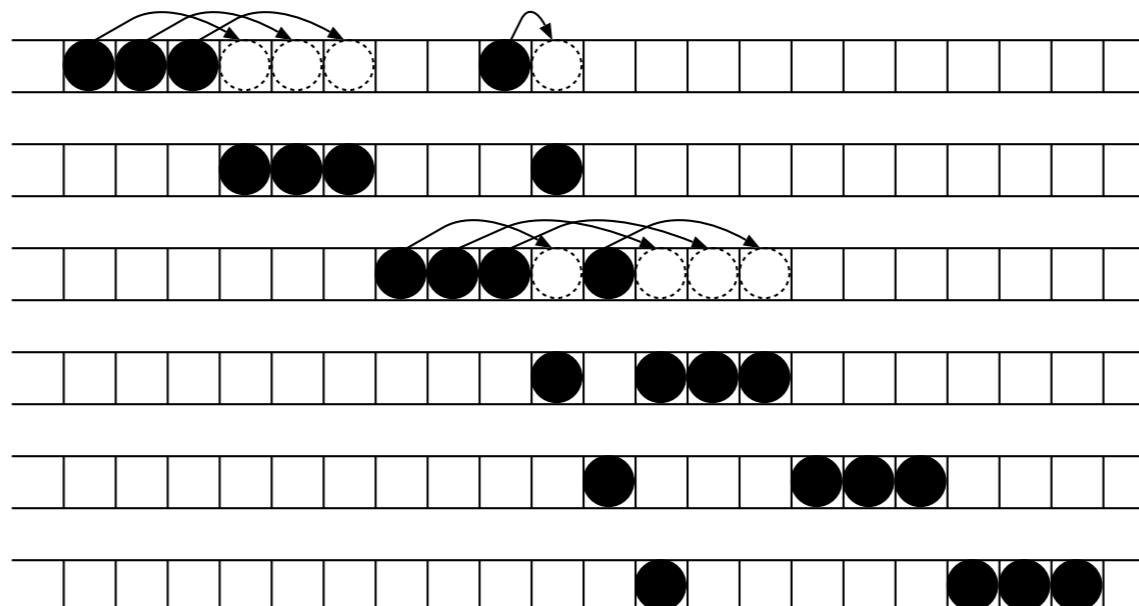


キンクとキンクの衝突 (動画)

## セルオートマトンのソリトン

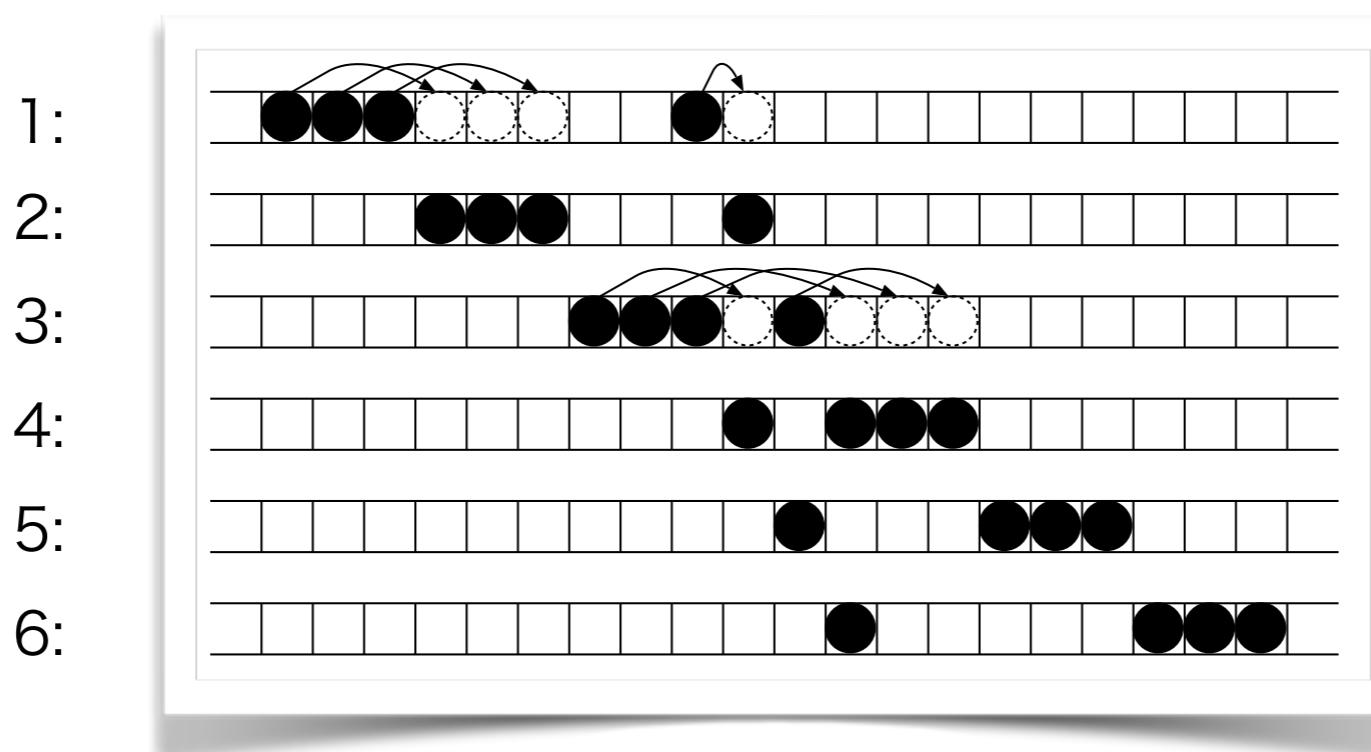
1列に並んだ箱の中に粒子が配置され、それらが一定の規則で配置を変えるような系をセルオートマトンという。箱玉系と呼ばれるセルオートマトンはソリトンの離散的モデルとして知られている。最も簡単な箱玉系（高橋-薩摩系）は次の規則に従う。

- (1) 並んでいる玉を、左端から順に、その右側の最も近い空き箱に移動する。
- (2) すべての玉を移動した後、最初に戻って同じことを繰り返す。



武部尚志「ソリトンの数学」(2008年5月) より抜粋

# セルオートマトンのソリトン

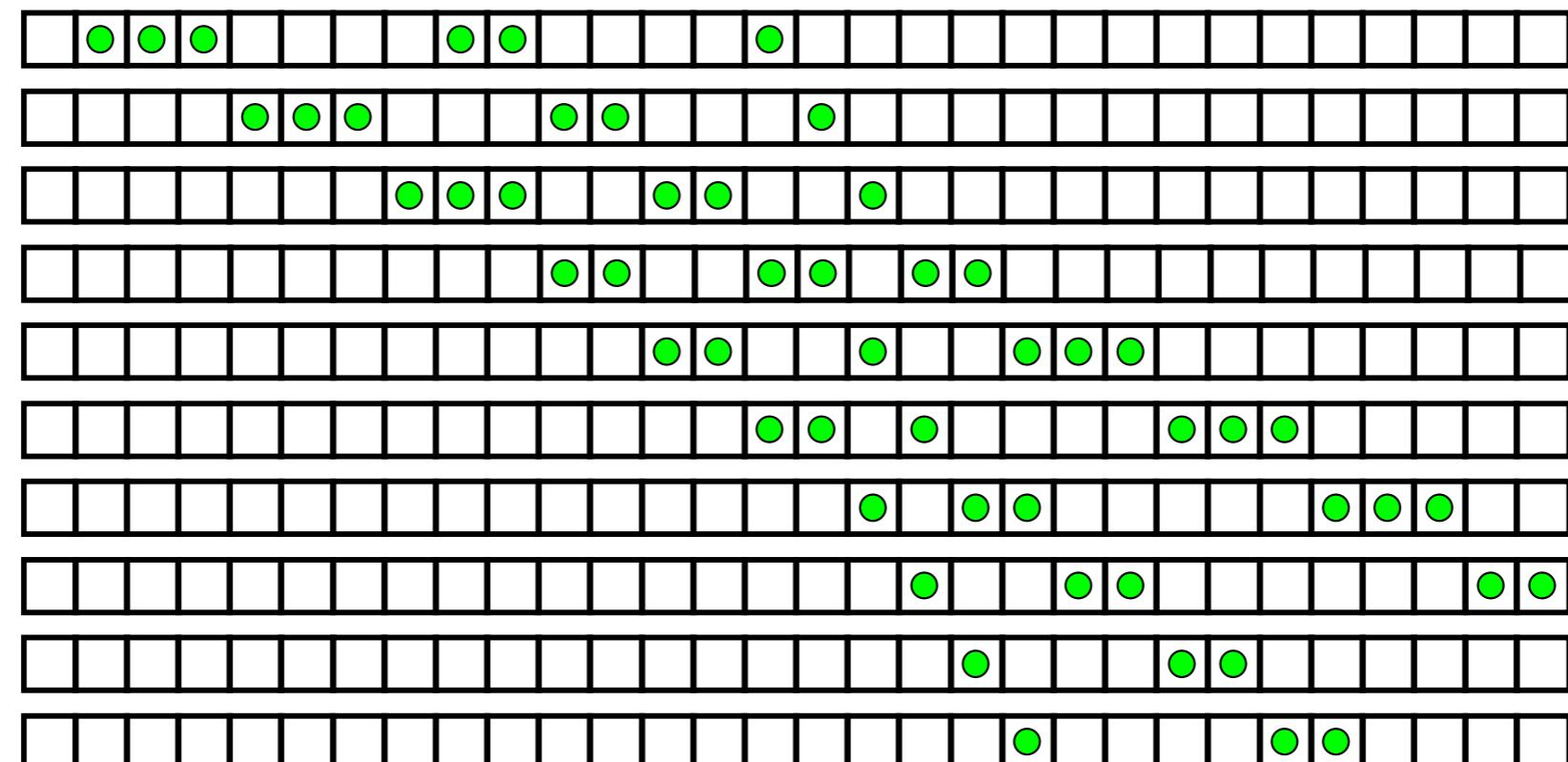


## 【観察】

- 1) 第1段階～第3段階と第4段階～第6段階では、長さ3と長さ1の玉の並びが見えている。これらはソリトンである。これらのソリトンはそれぞれ一定速度(3と1)で右に進んでいる。
- 2) 第3段階～第4段階では長さ3のソリトンが長さ1のソリトンを追い越している。ここでソリトンが衝突したと考えられる。
- 3) 各ソリトンは衝突の前後で同じ速度で進んでいるが、その進み方は時間の1次関数ではなくて、衝突に際して少し前後にずれている(位相のずれ)。このような位相のずれはKdV方程式の場合にも見られる。

# セルオートマトンのソリトン

3つのソリトンが存在する例



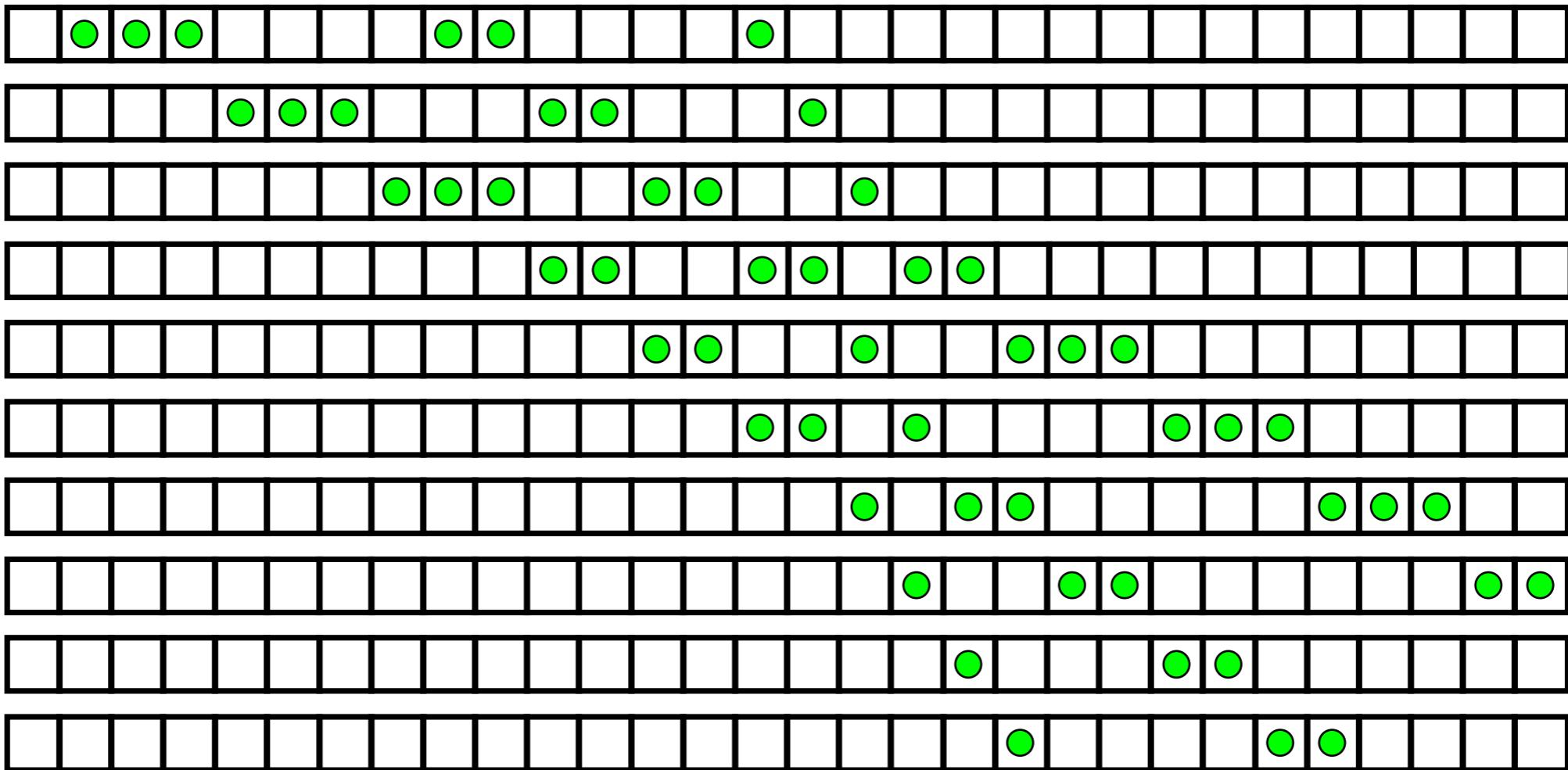
時弘哲治「箱玉系の数理」(2008年秋) より抜粋

## 問題演習

問題：2番目の例が上の規則に従っていることを確認せよ。  
さらに、1番目の例にならって、この例でのソリトンを特定し、それらの振る舞い（進行速度、衝突の様子、中心の位置の位相のずれなど）を分析せよ。

問題：そのほかに何か気がついたことがあれば述べよ。

提出用紙（必要ならば裏面も使ってください）



学科

コース

学籍番号

氏名