局所ユニタリ変換と$H^3(G,U(1))$

塩崎　謙

October 9, 2021

Abstract

Else=Nayak [1]の方法と，Levin=Gu模型 [2]における具体例を用いた計算のメモ．

1　Else=Nayakの方法

一般に，非カイラルな可逆相（SPT相）においては，系の境界において低エネルギーのHilbert空間において実現する対称性演算子は，サイト毎のユニタリ変換の積

$$\bigotimes_x u_x(g) \tag{1}$$

の形式で書くことはできないが，局所ユニタリ変換（局所ハミルトニアンの有限時間発展演算子）の形で書くことができる，と信じられている．この点に注目して，[1]では，SPT相の分類が群コホモロジー$H^{d+1}(G,U(1))$で与えられることを示している．空間2次元の場合に[1]の方法をまとめたあと，[2]の具体例で確認する．

SPT相において，2次元の円板の境界$S^1=\partial D^2$の低エネルギーHilbert空間において射影された対称性演算子を$U_{S^1}(g\in G)$とする． $U_{S^1}(g)$に不定性は存在しない．境界のS^1の部分区間$I=[a,b]$を取り，Iに$U_{S^1}(g)$を制限し，$U_I(g)$と書く．

- $U_{S^1}(g)$は局所ユニタリ変換で書くことができるため，適当に制限して， $U_I(g)$を得ることはできる．
- 一方で，$U_I(g)$はIの境界近傍にサポートを持つ局所ユニタリ変換だけの不定性が生じる．

境界∂Iにおける不定性 [1]のため，群構造はup to 境界∂Iにおける局所ユニタリ変換，で成立する．

$$U_I(g_1)U_I(g_2)=\Omega_{\partial I}(g_1,g_2)U_I(g_1g_2). \tag{2}$$

ここで，境界∂I近傍にサポートを持つ局所ユニタリ変換を$\Omega_{\partial I}(g_1,g_2)$と書いた．

- よって，局所ユニタリ変換$U_{S^1}(g)$の分類問題は，局所ユニタリ変換の”障害”$\Omega_{\partial I}(g_1,g_2)$の分類問題に帰着した．

$\Omega_{\partial I}$は任意でなく，$(U_I(g_1)U_I(g_2))U_I(g_3)=U_I(g_1)(U_I(g_2)U_I(g_3))$より以下の制限がある．

$$\Omega_{\partial I}(g_1,g_2)\Omega_{\partial I}(g_1g_2,g_3)={}^{U_I(g_1)}\Omega_{\partial I}(g_2,g_3)\Omega_{\partial I}(g_1,g_2g_3). \tag{3}$$

[1] きちんと定義すべき

ここで，左作用

$$ {}^{U_I(g_1)}\Omega_{\partial I}(g_2, g_3) = U_I(g_1)\Omega_{\partial I}(g_2, g_3)U_I(g_1)^{-1} \tag{4} $$

を導入した．さらに，$\Omega_{\partial I}(g_1, g_2)$を片方の境界$a$に制限し，$a$近傍にサポートを持つ局所ユニタリ変換を$\Omega_a(g_1, g_2)$と書く． $U(1)$位相の不定性が生じるため，$\omega(g_1, g_2, g_3)$を$U(1)$位相として，

$$ \Omega_a(g_1, g_2)\Omega_a(g_1g_2, g_3) = \omega(g_1, g_2, g_3)^{U_I(g_1)}\Omega_a(g_2, g_3)\Omega_a(g_1, g_2g_3) \tag{5} $$

と書くことができる． $\omega(g_1, g_2, g_3)$はコサイクル条件

$$ \delta\omega = 0 \tag{6} $$

を満たすことが示される．

2 Levin-Gu模型

$\mathbb{Z}_2 = \{e, \sigma\}$と書く． Levin-Gu模型 [2]において，1次元の端の$\mathbb{Z}_2$対称性変換は，

$$ U_{S^1}(e) = \mathrm{Id}, \tag{7} $$

$$ U_{S^1}(\sigma) = \prod_j \sigma_j^x \prod_j e^{\frac{\pi i}{2}\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}} \tag{8} $$

で与えられる．ここで，2番目の因子は，有限系においては不定性を持つことに注意する．例えば，閉じた鎖においては

$$ \prod_j e^{\frac{\pi i}{2}\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}} = \prod_j e^{\pi i \frac{1+\sigma_j^z}{2}\frac{1-\sigma_{j+1}^z}{2}} \tag{9} $$

は同じ局所ユニタリを与えるが，区間$I = [1, L]$においては両者に違いが生じる．さて，有限区間$I = [1, L]$における局所ユニタリ変換を

$$ U_I(e) = \mathrm{Id}, \tag{10} $$

$$ U_I(\sigma) = \prod_{j=1}^{L} \sigma_j^x \prod_{j=1}^{L-1} e^{\frac{\pi i}{2}\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}} \tag{11} $$

としてみよう．すると，

$$ U_I(\sigma)^2 = \prod_{j=1}^{L} \sigma_j^x \prod_{j=1}^{L-1} e^{\frac{\pi i}{2}\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}} \prod_{j=1}^{L} \sigma_j^x \prod_{j=1}^{L-1} e^{\frac{\pi i}{2}\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}} \tag{12} $$

$$ = \prod_{j=1}^{L-1} (-1)^{\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}} \tag{13} $$

$$ = \prod_{j=1}^{L-1} \sigma_j^z\sigma_{j+1}^z \tag{14} $$

$$ = \sigma_1^z\sigma_L^z \tag{15} $$

となる．よって，

$$ \Omega_{\partial I}(g_1, g_2) = \begin{cases} \sigma_1^z\sigma_L^z & (g_1 = g_2 = \sigma), \\ \mathrm{Id} & (\mathrm{else}), \end{cases} \tag{16} $$

を得る．

$$
{}^{U_I(\sigma)}\Omega_{\partial I}(\sigma,\sigma) = (\prod_{j=1}^{L}\sigma_j^x\prod_{j=1}^{L-1}e^{\frac{\pi i}{2}\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}})(\sigma_1^z\sigma_L^z)(\prod_{j=1}^{L}\sigma_j^x\prod_{j=1}^{L-1}e^{\frac{\pi i}{2}\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}})^{-1} = (-\sigma_1^z)(-\sigma_L^z) \tag{17}
$$

に注意．区間Iの左端への制限は

$$
\Omega_a(g_1,g_2) = \begin{cases} \sigma_1^z & (g_1=g_2=\sigma), \\ \mathbf{1} & (\text{else}), \end{cases} \tag{18}
$$

と取ることができる．このとき，唯一の非自明な左作用

$$
\begin{aligned}
{}^{U_I(\sigma)}\Omega_a(\sigma,\sigma) &= U_I(\sigma)\Omega_a(\sigma,\sigma)U_I(\sigma)^{-1} && (19)\\
&= (\prod_{j=1}^{L}\sigma_j^x\prod_{j=1}^{L-1}e^{\frac{\pi i}{2}\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}})(\sigma_1^z)(\prod_{j=1}^{L}\sigma_j^x\prod_{j=1}^{L-1}e^{\frac{\pi i}{2}\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}})^{-1} && (20)\\
&= -\sigma_1^z && (21)
\end{aligned}
$$

に注意すると，3コサイクルωにおいて1でないのは，$(g_1,g_2,g_3)=(\sigma,\sigma,\sigma)$の組み合わせのみであることがわかるので，

$$
\omega(g_1,g_2,g_3) = \begin{cases} -1 & (g_1=g_2=g_3=\sigma), \\ 1 & (\text{else}), \end{cases} \tag{22}
$$

がわかる．このようなωは，$H^3(\mathbb{Z}_2,U(1))$が非自明な群コサイクルであることが知られている．

別の$U_I(\sigma)$の選び方についても確認しておく．

$$
\tilde{U}_I(\sigma) = \prod_{j=1}^{L}\sigma_j^x\prod_{j=1}^{L-1}e^{\pi i\frac{1+\sigma_j^z}{2}\frac{1-\sigma_{j+1}^z}{2}} \tag{23}
$$

$$
\tag{24}
$$

とすると，$\tilde{U}_I(\sigma)$と$U_I(\sigma)$はIの端での局所ユニタリ変換だけ異なる．実際，

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}_I(\sigma) &= \prod_{j=1}^{L}\sigma_j^x(i\sigma_1^z)(\prod_{j=1}^{L-1}e^{\frac{\pi i}{2}\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}})(-i\sigma_L^z) && (25)\\
&= \sigma_1^z U_I(\sigma)\sigma_L^z && (26)
\end{aligned}
$$

である．すると，

$$
\tilde{U}_I(\sigma)^2 = (\sigma_1^z U_I(\sigma)\sigma_L^z)(\sigma_1^z U_I(\sigma)\sigma_L^z) = U_I(\sigma)^2 \tag{27}
$$

より，ωは変化しない．

さて

$$
\Omega_a(\sigma,\sigma)\Omega_a(e,\sigma) = -{}^{U_I(\sigma)}\Omega_a(\sigma,\sigma)\Omega_a(\sigma,e). \tag{28}
$$

について考えておこう．この関係式の元は，区間Iにおける$\mathbb{Z}_2$対称性変換$U_I(\sigma)U_I(\sigma)U_I(\sigma)$を分解する順番依存性だった．

$$
(U_I(\sigma)U_I(\sigma))U_I(\sigma) = \Omega_{\partial I}(\sigma,\sigma)U_I(e)U_I(\sigma) = \Omega_{\partial I}(\sigma,\sigma)\Omega_a(e,\sigma)U_I(\sigma), \tag{29}
$$

$$
U_I(\sigma)(U_I(\sigma)U_I(\sigma)) = U_I(\sigma)\Omega_{\partial I}(\sigma,\sigma)U_I(e) = {}^{U_I(\sigma)}\Omega_{\partial I}(\sigma,\sigma)\Omega_a(\sigma,e)U_I(\sigma). \tag{30}
$$

絵で書くと，図のようになる．

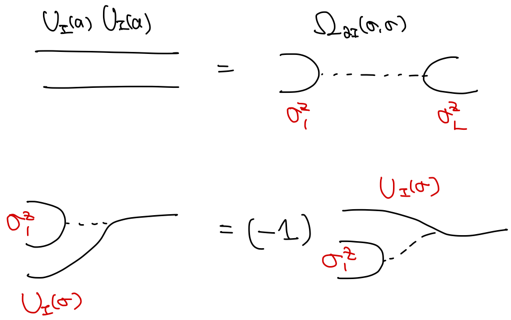

Figure 1

References

[1] Dominic V. Else, Chetan Nayak, *Classifying symmetry-protected topological phases through the anomalous action of the symmetry on the edge*, arXiv:1409.5436.

[2] Michael Levin, Zheng-Cheng Gu, *Braiding statistics approach to symmetry-protected topological phases*, arXiv:1202.3120.