

ノート：2パラメータポンプ

塩崎 謙

November 1, 2021

1 Bockstein マップを2回施して、2パラメータポンプの模型が構成できるか？

まず、1パラメータポンプの構成を述べる。 $\omega^{(d)} \in Z^d(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ を与える。リフト $\omega^{(d)} \mapsto \tilde{\omega}^{(d)} \in \mathbb{R}$ をひとつ選ぶ。このとき、 $d\tilde{\omega}^{(d)} \in Z^{d+1}(G, \mathbb{Z})$ に注意する。 $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ でパラメータ付けされた \mathbb{R}/\mathbb{Z} 係数の $(d+1)$ コサイクルが

$$\omega_t^{(d+1)} = td\tilde{\omega}^{(d)} \quad (1)$$

で得られる。

2パラメータポンプの模型は、素朴にはもう一度上のBocksteinマップを $\omega_t^{(d+1)}$ に実行すれば良いと思われるが、 $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ において連続なリフトが構成できないために機能しないように思われる。この点について例を用いて考える。

$G = \mathbb{Z}_2 = \{e, \sigma\}$ とする。 $\omega^{(1)} \in Z^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ として、

$$\omega^{(1)}(e) = 0, \quad \omega^{(1)}(\sigma) = 1/2 \quad (2)$$

とする。リフトは同じ表示、

$$\tilde{\omega}^{(1)}(e) = 0, \quad \tilde{\omega}^{(1)}(\sigma) = 1/2 \quad (3)$$

とする。このとき、

$$(d\tilde{\omega}^{(1)})(g, h) = \begin{cases} 1 & (g = h = \sigma), \\ 0 & (\text{else}). \end{cases} \quad (4)$$

よって、1パラメータ付けされた2コサイクル $\omega_t^{(2)} \in Z^2(\mathbb{Z}_2, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ は

$$\omega_t^{(2)}(g, h) = \begin{cases} t & (g = h = \sigma), \\ 0 & (\text{else}), \end{cases} \quad (5)$$

で与えられる。さらに $\omega_t^{(2)}$ を \mathbb{R} 係数にリフトしたいが、 $\omega_t^{(2)}(\sigma, \sigma) = t$ を $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ における連続性を保ったまま \mathbb{R} 値にリフトすることはできない。

以上の困難は、そもそも3コサイクルの空間 $Z^3(\mathbb{Z}_2, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ が、空間として、 $Z^3(\mathbb{Z}_2, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ であることと矛盾しない。 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ は π_2 が自明であるので、 $Z^3(\mathbb{Z}_2, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の元に基づくコサイクル模型によって非自明な2パラメータポンプが得られることは、ない。