Baer和

塩崎　謙

March 7, 2023

Abstract

1　Baer和

$$0 \to B \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{g_0} A \to 0, \tag{1}$$

$$0 \to B \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{g_1} A \to 0 \tag{2}$$

を$\mathbb{Z}$加群の拡大とする．$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,B)$の和に対応する拡大を構成したい．

$$f : B \to E_0 \oplus E_1, \quad b \mapsto (f_0(b), -f_1(b)), \tag{3}$$

$$g : E_0 \oplus E_1 \to A, \quad (e_0, e_1) \mapsto g_0(e_0) - g_1(e_1), \tag{4}$$

とする． $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$は，

$$b \mapsto (f_0(b), -f_1(b)) \mapsto g_0 \circ f_0(b) + g_1 \circ f_1(b) = 0 + 0 \tag{5}$$

より従う． Baer和は

$$0 \to B \xrightarrow{f'} \mathrm{Ker}\, g/\mathrm{Im}\, f \xrightarrow{g'} A \to 0 \tag{6}$$

で与えられる．ここで，

$$f' : B \to \mathrm{Ker}\, g/\mathrm{Im}\, f, \quad b \mapsto [(f_0(b), 0)] = [(0, f_1(b))], \tag{7}$$

$$g' : \mathrm{Ker}\, g/\mathrm{Im}\, f \to A, \quad (e_0, e_1) \mapsto g_0(e_0) = g_1(e_1) \tag{8}$$

である． $(f_0(b), 0) = (f_0(b'), -f_1(b'))$を仮定すると$(f_0(b-b'), f_1(b')) = (0,0)$と$f_0, f_1$の単射性より，$b = b' = 0$となる．よって，$\mathrm{Im}\,[B \to \mathrm{Ker}\, g, b \mapsto (f_0(b), 0)]$と$\mathrm{Im}\, f$の共通部分が存在しないことに注意．$g'$がwell-definedであることは，$(f_0(b), -f_1(b)) \mapsto g_0(f_0(b)) = 0 = g_1(f_1(b))$より．

完全性を示す． f'の単射性は，$[(f_0(b), 0)] = 0$を仮定すると，ある$b' \in B$が存在して，$(f_0(b), 0) = (f_0(b'), -f_1(b'))$となるため，同様にして$b = 0$． g'の全射性はg_0, g_1の全射性より． $\mathrm{Im}\, f' \subset \mathrm{Ker}\, g'$は$[f_0(b), 0] \mapsto g_0(f_0(b)) = 0$より． $\mathrm{Ker}\, g' \subset \mathrm{Im}\, f'$を示す．$[(e_0, e_1)] \mapsto g_0(e) = g_1(e') = 0$を仮定する． g_0, g_1の全射性より，$b, b' \in B$が存在して，$e_0 = f_0(b), e_1 = f_1(b')$．すると，$[(e_0, e_1)] = [(f_0(b), f_1(b'))] = [(f_0(b-b'), 0)] \in \mathrm{Im}\, f'$より．

拡大のBaer和の結果得られる$\mathbb{Z}$加群にのみ興味がある場合は，$\mathrm{Ker}\, f/\mathrm{Im}\, g$を計算すれば良い．Baer和で得られた拡大の，さらにBaer和を取る場合はf', g'も計算する必要がある． f', g'がどのように得られるか，いくつかの例に対して手計算する．

1.1　例1

拡大

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & 1 & \longrightarrow & 4 & & & & \\ & & & & 1 & \longrightarrow & 1 & & \end{array} \tag{9}$$

の，自分自身とのBaer和を計算する．

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \xrightarrow{g} & \mathbb{Z}_4 \\ 1 & \longrightarrow & (4,-4) & & \\ & & (n,m) & \longrightarrow & n-m \end{array} \tag{10}$$

すると，

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}(4,-4), \tag{11}$$
$$\operatorname{Ker} g = \mathbb{Z}(1,1)\oplus\mathbb{Z}(4,0) \cong \mathbb{Z}(1,1)\oplus\mathbb{Z}(2,-2), \tag{12}$$

より，

$$\operatorname{Ker} g/\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}(1,1)\oplus\mathbb{Z}_2(2,-2). \tag{13}$$

さらに，f', g'を決定する．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{f'} & \frac{\mathbb{Z}(1,1)\oplus\mathbb{Z}(2,-2)}{\mathbb{Z}(4,-4)} & \xrightarrow{g'} & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & 1 & \longrightarrow & [(4,0)]=[(2,2)]+[(2,-2)] & & & & \\ & & & & (1,1) & \longrightarrow & 1 & & \\ & & & & (2,-2) & \longrightarrow & 2 & & \end{array} \tag{14}$$

より，

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{f'} & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{g'} & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & 1 & \longrightarrow & (2,1) & & & & \\ & & & & (1,0) & \longrightarrow & 1 & & \\ & & & & (0,1) & \longrightarrow & 2 & & \end{array} \tag{15}$$

以上の計算をできるだけ機械的に実行する．まず，$\operatorname{Im} f$が$\operatorname{Ker} g$の直和成分となるように$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$の基底を変形する． $\operatorname{Im} f$を$\operatorname{Ker} g$の基底で展開すると，展開係数(x,y)は

$$(4,-4)\begin{pmatrix} 1,1 \\ 4,0 \end{pmatrix}^{+} = (-4,2). \tag{16}$$

これをスミス分解すると，

$$u(-4,2)v = (2,0), \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

となり，$\operatorname{Ker} g/\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}$がわかる． $\operatorname{Ker} g$の基底は

$$v^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

である． f'は

$$f' : 1 \mapsto (4,0) \tag{19}$$

であるがこれを$\mathbb{Z}(-2,2)\oplus\mathbb{Z}(3,-1)$基底で展開すると，

$$(4,0)\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{+} = (4,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^{+} v = (1,2) \tag{20}$$

なので，これが新しい基底における$f'(1)$の成分． g'については，

$$g' : \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_0(-2) \\ g_0(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{21}$$

と決まる．

1.2 計算実装１：B, E_0, E_1が全て自由$\mathbb{Z}$加群の場合

上の例の計算を一般化する．

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & P_A \\
 & & & & \downarrow \\
 & & E_0 \oplus E_1 & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{A} \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \\
B & \xrightarrow{f} & E_0 \oplus E_1 & \xrightarrow{g} & A
\end{array}
\tag{22}
$$

ここで，Aはねじれ$\mathbb{Z}$加群である．

- $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\,(\tilde{g} \oplus \mathrm{Id}_{P_A})|_{E_0 \oplus E_1}$を計算する．
- $\mathrm{Im}\, f$を$\mathrm{Ker}\, g$の基底で展開する．展開行列をMとする． $\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Ker}\, g$の$E_0 \oplus E_1$への埋め込みを，記号の乱用だが$\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Ker}\, g$と書くと，$M = (\mathrm{Im}\, f)(\mathrm{Ker}\, g)^+$である．
- スミス分解$uMv = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, 0, \dots)$を計算する． $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, 0, \dots)$は$\mathrm{Ker}\, g / \mathrm{Im}\, f$の$\mathbb{Z}$加群としての構造を示す．つまり，$\lambda_p$は$\mathbb{Z}_{\lambda_p}$に，0は$\mathbb{Z}$に対応する．
- v変換した基底におけるf'の表示は，埋め込み$\mathrm{Im}\, f_0 \subset E_0 \subset E_0 \oplus E_1$を$\mathrm{Im}\, f_0$自身で書くと，$(\mathrm{Im}\, f_0)(\mathrm{Ker}\, g)^+ v$で与えられる．
- g'はv変換した基底において$\mathrm{Ker}\, g$の行き先を見れば良い．つまり，行列$v^{-1}(\mathrm{Ker}\, g)$をE_0に射影し，g_0でマップする． $\mathrm{Im}\, g_0$の行列表示はE_0の標準基底であるので， g'の行列表示は，$v^{-1}(\mathrm{Ker}\, g)(\mathrm{Im}\, g_0)$で与えられる．

1.3 例２

もう少し複雑な例として，次の２つの拡大のBaer和を計算する．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{f_0} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{g_0} & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \\
 & & (1,0) & \longrightarrow & (2,1,0) & & & & \\
 & & (0,1) & \longrightarrow & (0,0,1) & & & & \\
 & & & & (1,0,0) & \longrightarrow & 1 & & \\
 & & & & (0,1,0) & \longrightarrow & 2 & & \\
 & & & & (0,0,1) & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}
\tag{23}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8 & \xrightarrow{g_1} & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \\
 & & (1,0) & \longrightarrow & (1,0) & & & & \\
 & & (0,1) & \longrightarrow & (0,4) & & & & \\
 & & & & (1,0) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & & & (0,1) & \longrightarrow & 1 & &
\end{array}
\tag{24}
$$

このとき，

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8 & \xrightarrow{g} & \mathbb{Z}_4 \\
(1,0) & \longrightarrow & (2,1,0,-1,0) & & \\
(0,1) & \longrightarrow & (0,0,1,0,-4) & & \\
 & & (n,m,k,p,q) & \longrightarrow & n+2m-q
\end{array}
\tag{25}
$$

すると，

$$\begin{align}\mathrm{Im}\, f &= \mathbb{Z}(2,1,0,-1,0) \oplus \mathbb{Z}_2(0,0,1,0,-4), \tag{26}\\ \mathrm{Ker}\, g &= \mathbb{Z}(1,0,0,0,1) \oplus \mathbb{Z}_4(0,1,0,0,2) \oplus \mathbb{Z}_2(0,0,1,0,0) \oplus \mathbb{Z}(0,0,0,1,0) \tag{27}\\ &\cong \mathbb{Z}(1,0,0,0,1) \oplus \mathbb{Z}_4(0,1,0,0,2) \oplus \mathbb{Z}_2(0,0,1,0,-4) \oplus \mathbb{Z}(-2,-1,0,1,0). \tag{28}\end{align}$$

これから，

$$\mathrm{Ker}\, g/\mathrm{Im}\, f = \mathbb{Z}[(1,0,0,0,1)] \oplus \mathbb{Z}_4[(0,1,0,0,2)]. \tag{29}$$

f', g'を計算する．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{f'} & \frac{\mathbb{Z}(1,0,0,0,1)\oplus\mathbb{Z}_4(0,1,0,0,2)\oplus\mathbb{Z}_2(0,0,1,0,-4)\oplus\mathbb{Z}(-2,-1,0,1,0)}{\mathbb{Z}(2,1,0,-1,0)\oplus\mathbb{Z}_2(0,0,1,0,-4)} & \xrightarrow{g'} & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & (1,0) & \longrightarrow & [(2,1,0,0,0)] = 2[(1,0,0,0,1)] - [(0,1,0,0,2)] & & & & \\ & & (0,1) & \longrightarrow & [(0,0,1,0,0)] = 2[(0,1,0,0,2)] & & & & \\ & & & & (1,0,0,0,1) & \longrightarrow & 1 & & \\ & & & & (0,1,0,0,2) & \longrightarrow & 2 & & \end{array} \tag{30}$$

より，

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{f'} & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{g'} & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & (1,0) & \longrightarrow & (2,-1) & & & & \\ & & (0,1) & \longrightarrow & (0,2) & & & & \\ & & & & (1,0) & \longrightarrow & 1 & & \\ & & & & (0,1) & \longrightarrow & 2 & & \end{array} \tag{31}$$

1.4　計算実装２：一般の場合

$$\begin{array}{ccccc} P_B & & P_{E_0}\oplus P_{E_1} & & P_A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{B} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{E}_0\oplus\tilde{E}_1 & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{A} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & E_0\oplus E_1 & \xrightarrow{g} & A \end{array} \tag{32}$$

ここで，Aはねじれ$\mathbb{Z}$加群である．

- 一般論より，

$$\mathrm{Ker}\, g = \frac{\mathrm{Ker}\,(\tilde{g}\oplus \mathrm{Id}_{P_A})|_{\tilde{E}_0\oplus\tilde{E}_1}}{\mathrm{Im}\,\tilde{f} + (P_{E_0}\oplus P_{E_1})}. \tag{33}$$

- $\mathrm{Ker}\,(\tilde{g}\oplus \mathrm{Id}_{P_A})|_{\tilde{E}_0\oplus\tilde{E}_1}$の基底ベクトルを縦に並べたものを$M_g$とする：

$$\mathrm{Ker}\,(\tilde{g}\oplus \mathrm{Id}_{P_A})|_{\tilde{E}_0\oplus\tilde{E}_1} = \left\langle \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix} \right\rangle = \langle M_g \rangle . \tag{34}$$

M_gは$|\mathrm{Ker}\, g| \times |E_0\oplus E_1|$行列．

- 同様に,

$$\operatorname{Im}\tilde{f}+(P_{E_0}\oplus P_{E_1})=\langle M_f\rangle \tag{35}$$

とする. M_fは線形独立に取る必要はない. M_fは$|B|+|P_{E_0}\oplus P_{E_1}|\times|E_0\oplus E_1|$行列.

- $\operatorname{Im}\tilde{f}+P_{E_0}\oplus P_{E_1}$を$\operatorname{Ker}(\tilde{g}\oplus \mathrm{Id}_{P_A})|_{\tilde{E}_0\oplus\tilde{E}_1}$の基底で展開する. 展開係数は

$$M_f M_g^+ \tag{36}$$

で与えられる.

- 行列$M_f M_g^+$をスミス分解する.

$$u(M_f M_g^+)v=\Lambda=\left[\begin{array}{cccccc} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ \hline & & & O & & \end{array}\right],\quad \lambda_i|\lambda_{i+1}. \tag{37}$$

Λの対角成分が$\operatorname{Ker}g/\operatorname{Im}f$の$\mathbb{Z}$加群のデータである. λ_iは$\mathbb{Z}/\lambda_i\mathbb{Z}$に対応して, 0は$\mathbb{Z}$に対応する.

$$v^{-1}M_g=\begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix} \tag{38}$$

がf',g'を表示したい基底である. 上から$\mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z},\mathbb{Z}/\lambda_2\mathbb{Z},\dots,\mathbb{Z},\dots,$に対応する. $\lambda_i=1$もあることに注意.

- $f':b\mapsto[(f_0(b),0)]$の表示は, まず,

$$f_0(B)=\langle M_{f_0}\rangle \tag{39}$$

と表示する. M_{f_0}は$|B|\times|E_0|$行列である. E_1だけ0を加えて, その行列を$v^{-1}M_g$で展開する.

$$(M_{f_0},O)(v^{-1}M_g)^+=(M_{f_0},O)M_g^+v. \tag{40}$$

これがf'の表示.

- $g':(e_0,e_1)\mapsto g_0(e_0)$の表示を求める. $\operatorname{Ker}g$をE_0に射影する.

$$(v^{-1}M_g)|_{E_0}. \tag{41}$$

これは$|\operatorname{Ker}g|\times|E_0|$行列. これを$g_0$で送る.

$$g_0(E_0)=\langle M_{g_0}\rangle \tag{42}$$

と書く. これは$|E_0|\times|A|$行列. g'の表示は

$$(v^{-1}M_g)|_{E_0}M_{g_0} \tag{43}$$

で与えられる.

Mathematicaによる計算実装は, [1]を見よ.

References

[1] BaerSum.nb