

ノート：Bethe仮設法

塩崎 謙

March 1, 2022

Abstract

反強磁性XXX模型の $M = 2$ のセクターについて、周期境界条件、及び開放端条件におけるBethe方程式を導出した。周期境界条件においては解の個数を見積もった。

XXX模型に対して、ほぼBetheの現論文[1]に従ってBethe方程式の導出を行う。[2, 3]も参考にした。

1 XXX模型

N 格子点からなる円周上のハミルトニアンとして以下（反強磁性ハイゼンベルグ鎖）を考える。

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_{j+1} \quad (1)$$

$$= \sum_j (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ + \frac{1}{2} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) \quad (2)$$

$$= \sum_j (\sigma_{j+1}^- \sigma_j^+ + \sigma_{j-1}^- \sigma_j^+ + 2 \frac{1 - \sigma_j^z}{2} \frac{1 - \sigma_{j+1}^z}{2}) - 2 \sum_j \frac{1 - \sigma_j^z}{2} + \frac{N}{2}. \quad (3)$$

表記の規則として、 $\boldsymbol{\sigma}_{j+N} = \boldsymbol{\sigma}_j$ とする。ハミルトニアンは $SU(2)$ かつ並進不変。 S^z を対角化する基底を選ぶ。波動関数の基底として以下では $|0\rangle = |\uparrow \uparrow \dots\rangle$ を“真空”とし、 M 粒子状態を

$$|f\rangle_M = \sum_{1 \leq x_1 < \dots < x_M \leq N} f(x_1, \dots, x_M) \sigma_{x_1}^- \dots \sigma_{x_M}^- |0\rangle \quad (4)$$

とする。固有関数 f は定義域 $1 \leq x_1 < \dots < x_M \leq N$ においてのみ意味を持つことに注意。

M 粒子数のセクターにおいては $-2 \sum_j \frac{1 - \sigma_j^z}{2} = -2M$ は定数であるので、以下では

$$H = \sum_j (\sigma_{j+1}^- \sigma_j^+ + \sigma_{j-1}^- \sigma_j^+ + 2 \frac{1 - \sigma_j^z}{2} \frac{1 - \sigma_{j+1}^z}{2}) \quad (5)$$

と再定義して、これを解く。

1.1 並進対称性

(本節の内容は後で使わない.)

並進対称性より，以下によって定義される並進演算子 T ，

$$T\sigma_j T^{-1} = \sigma_{j+1}, \quad T|0\rangle = |0\rangle, \quad (6)$$

とハミルトニアン H は同時対角化可能． $T^N = 1$ より T の固有値は \mathbb{Z}_N 値に量子化される． $T = e^{iP}$, $P = \frac{2\pi p}{N}$, $p = 1, \dots, N-1$, なる固有空間において，固有関数 f は以下を満たす．

$$\sum_{1 \leq x_1 < \dots < x_M \leq N} f(x_1, \dots, x_M) \sigma_{x_1+1}^- \dots \sigma_{x_M+1}^- |0\rangle = e^{iP} \sum_{1 \leq x_1 < \dots < x_M \leq N} f(x_1, \dots, x_M) \sigma_{x_1}^- \dots \sigma_{x_M}^- |0\rangle. \quad (7)$$

左辺の和において， $x_M \leq N-1$ の寄与は

$$\sum_{1 \leq x_1 < \dots < x_M \leq N-1} f(x_1, \dots, x_M) \sigma_{x_1+1}^- \dots \sigma_{x_M+1}^- |0\rangle. \quad (8)$$

これと右辺の $2 \leq x_1$ の寄与

$$e^{iP} \sum_{2 \leq x_1 < \dots < x_M \leq N} f(x_1, \dots, x_M) \sigma_{x_1}^- \dots \sigma_{x_M}^- |0\rangle = e^{iP} \sum_{1 \leq x_1 < \dots < x_M \leq N-1} f(x_1+1, \dots, x_M+1) \sigma_{x_1+1}^- \dots \sigma_{x_M+1}^- |0\rangle \quad (9)$$

を比較して，

$$f(x_1, \dots, x_M) = e^{iP} f(x_1+1, \dots, x_M+1), \quad (x_M \leq N-1) \quad (10)$$

を得る．左辺の和において $x_M = N$ の寄与は

$$\sum_{1 \leq x_1 < \dots < x_{M-1} \leq N-1} f(x_1, \dots, x_{M-1}, N) \sigma_{x_1+1}^- \dots \sigma_{x_{M-1}+1}^- \sigma_1^- |0\rangle \quad (11)$$

$$= \sum_{1 \leq x_1 < \dots < x_{M-1} \leq N-1} f(x_1, \dots, x_{M-1}, N) \sigma_1^- \sigma_{x_1+1}^- \dots \sigma_{x_{M-1}+1}^- |0\rangle \quad (12)$$

であるが，これと右辺の $x_1 = 1$ の寄与

$$e^{iP} \sum_{2 \leq x_2 < \dots < x_M \leq N} f(1, x_2, \dots, x_M) \sigma_1^- \sigma_{x_2}^- \dots \sigma_{x_M}^- |0\rangle \quad (13)$$

$$= e^{iP} \sum_{1 \leq x_2 < \dots < x_M \leq N-1} f(1, x_2+1, \dots, x_M+1) \sigma_1^- \sigma_{x_2+1}^- \dots \sigma_{x_M+1}^- |0\rangle \quad (14)$$

$$= e^{iP} \sum_{1 \leq x_1 < \dots < x_{M-1} \leq N-1} f(1, x_1+1, \dots, x_{M-1}+1) \sigma_1^- \sigma_{x_1+1}^- \dots \sigma_{x_{M-1}+1}^- |0\rangle \quad (15)$$

と比較して，

$$f(x_1, \dots, x_{M-1}, N) = e^{iP} f(1, x_1+1, \dots, x_{M-1}+1) \quad (16)$$

を得る．

1.2 固有値方程式

固有値方程式

$$H|f\rangle_M = E|f\rangle_M \quad (17)$$

の構造をみていく．

1.2.1 $M = 1$

$M = 1$ の場合は第3項が落ち,

$$H|f\rangle_1 = \sum_{j,x} (\delta_{jx}\sigma_{j+1}^- + \delta_{j,x}\sigma_{j-1}^-)f(x)|0\rangle \quad (18)$$

$$= \sum_j (f(j)\sigma_{j+1}^- + f(j)\sigma_{j-1}^-)|0\rangle \quad (19)$$

$$= \sum_j (f(j-1) + f(j+1))\sigma_j^-|0\rangle \quad (20)$$

より固有値方程式

$$\begin{cases} f(j-1) + f(j+1) = Ef(j) & j = 2, \dots, N-1, \\ f(N) + f(2) = Ef(1), \\ f(N-1) + f(1) = Ef(N), \end{cases} \quad (21)$$

を得る. 平面波

$$f_k(x) = e^{ikx} \quad (22)$$

は1番目の方程式を満たし, このとき $E_k = 2 \cos k$ である. $k = \frac{2\pi p}{N}, p = 0, \dots, N-1$, とすると e^{ikx} は2, 3番目の方程式を満たす. よって N 個の線形独立な解が構成できた.

1.2.2 $M = 2$

飛び移り項について $x_1 \neq x_2$ のとき

$$\sigma_{j\pm 1}^- \sigma_j^+ \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle = \delta_{jx_1} \sigma_{x_1\pm 1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \delta_{jx_2} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2\pm 1}^- |0\rangle \quad (23)$$

に注意する. 同一サイトにおいて下降演算子が重なった場合は $\sigma_x^- \sigma_x^- = 0$ とする. 相互作用項については対角的な基底であり,

$$\sum_j \frac{1 - \sigma_j^z}{2} \frac{1 - \sigma_{j+1}^z}{2} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle = \delta_{|x_1 - x_2|, 1} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle. \quad (24)$$

$\delta_{|x_1 - x_2|, 1}$ は x_1, x_2 が隣接する場合のみ1を, 他の場合は0を返す. ハミルトニアン H の波動関数 $|f\rangle_2$ への作用は

$$H|f\rangle_2 = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N} f(x_1, x_2) (\sigma_{x_1+1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2+1}^- |0\rangle + \sigma_{x_1-1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2-1}^- |0\rangle) + 2\delta_{|x_1 - x_2|, 1} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \quad (25)$$

各項を順番に書き換える. 第1項は $x_2 = x_1 + 1$ の場合はゼロであるので,

$$\text{1st.} = \sum_{2 \leq x_1+1 < x_2 \leq N} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1+1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle = \sum_{2 \leq x_1 < x_2 \leq N} f(x_1 - 1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle. \quad (26)$$

第2項は $x_2 = N$ の場合とそれ以外の和に分離して, さらに $x_2 = N$ のときは $x_1 = 1$ の寄与がゼロであることを考慮して,

$$\text{2nd.} = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N-1} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2+1}^- |0\rangle + \sum_{2 \leq x_1 \leq N-1} f(x_1, N) \sigma_{x_1}^- \sigma_1^- |0\rangle \quad (27)$$

$$= \sum_{1 \leq x_1 < x_2-1 \leq N-1} f(x_1, x_2-1) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{2 \leq x_2 \leq N-1} f(x_2, N) \sigma_1^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle. \quad (28)$$

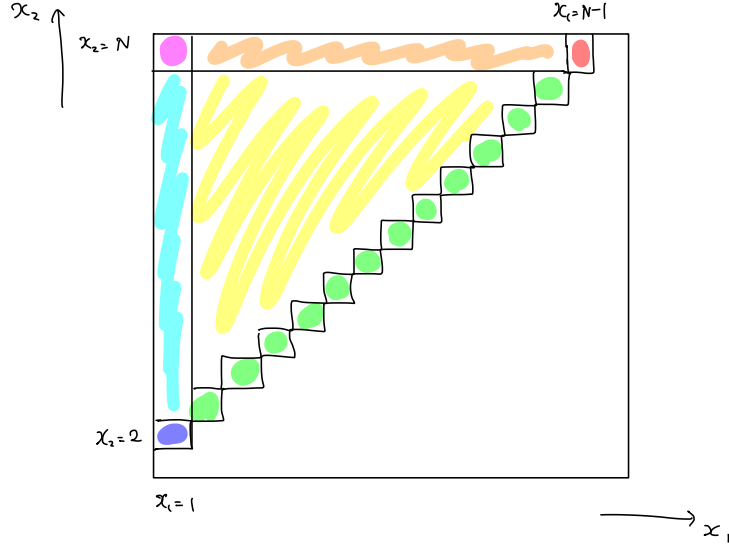


Figure 1

第3項は $x_1 = 1$ とそれ以外の和に分離してさらに $x_1 = 1$ の場合に $x_2 = N$ の寄与がゼロであるので,

$$3\text{rd.} = \sum_{2 \leq x_1 < x_2 \leq N} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1-1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{2 \leq x_2 \leq N-1} f(1, x_2) \sigma_N^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \quad (29)$$

$$= \sum_{1 \leq x_1 < x_2-1 \leq N-1} f(x_1+1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{2 \leq x_1 \leq N-1} f(1, x_1) \sigma_{x_1}^- \sigma_N^- |0\rangle. \quad (30)$$

第4項は $x_2 = x_1 + 1$ の場合はゼロであるので,

$$4\text{th.} = \sum_{2 \leq x_1+1 < x_2 \leq N} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2-1}^- |0\rangle = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N-1} f(x_1, x_2+1) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle. \quad (31)$$

第5項は円周上の2点として隣接する場合のみ寄与があり,

$$5\text{th.} = \sum_{1 \leq x \leq N-1} f(x, x+1) 2\sigma_x^- \sigma_{x+1}^- |0\rangle + f(1, N) 2\sigma_1^- \sigma_N^- |0\rangle. \quad (32)$$

和の場合分けを図示すると図1のようになる。それぞれの領域での固有値方程式を見ていく。

- $2 \leq x_1, x_1 + 1 \leq x_2 \leq N - 1$ のとき (黄色) は,

$$(A): \quad f(x_1 - 1, x_2) + f(x_1, x_2 - 1) + f(x_1 + 1, x_2) + f(x_1, x_2 + 1) = E f(x_1, x_2). \quad (33)$$

- $x_1 = 1, 3 \leq x_2 \leq N - 1$ のとき (水色) は,

$$(B): \quad f(x_2, N) + f(1, x_2 - 1) + f(2, x_2) + f(1, x_2 + 1) = E f(1, x_2). \quad (34)$$

- $2 \leq x_1 \leq N - 2, x_2 = N$ のとき (橙色) は,

$$(C): \quad f(x_1 - 1, N) + f(x_1, N - 1) + f(x_1 + 1, N) + f(1, x_1) = E f(x_1, N). \quad (35)$$

- $2 \leq x_1 = x, x_2 = x + 1, 2 \leq x \leq N - 2$ のとき (緑色) は,

$$(D): \quad f(x - 1, x + 1) + f(x, x + 2) + 2f(x, x + 1) = E f(x, x + 1). \quad (36)$$

- $x_1 = 1, x_2 = 2$ のとき（青色）は,

$$(E): f(2, N) + f(1, 3) + 2f(1, 2) = Ef(1, 2). \quad (37)$$

- $x_1 = N - 1, x_2 = N$ のとき（赤色）は,

$$(F): f(N - 2, N) + f(1, N - 1) + 2f(N - 1, N) = Ef(N - 1, N). \quad (38)$$

- $x_1 = 1, x_2 = N$ のとき（桃色）は,

$$(G): f(1, N - 1) + f(2, N) + 2f(1, N) = Ef(1, N). \quad (39)$$

さて、方程式を眺めると、 $f(x_1, x_2)$ の定義域 $1 \leq x_1 < x_2 \leq N$ を、 $0, N + 1, N + 2$ を含むように拡張して、余分な自由度について $f(x_1, x_2)$ 境界条件を導入しておくことと便利であることに気がつく。 $2N - 1$ 個の変数

$$f(0, x_2), \quad x_2 = 1, \dots, N - 1, \quad (40)$$

$$f(x_1, N + 1), \quad x_1 = 2, \dots, N, \quad (41)$$

$$f(N, N + 2), \quad (42)$$

を新たに導入する。さらに「境界条件」として以下を課す。

$$\begin{cases} f(0, x_2) = f(x_2, N), & x_2 = 1, \dots, N - 1, \\ f(x_1, N + 1) = f(1, x_1), & x_1 = 2, \dots, N, \\ f(N, N + 2) = f(2, N). \end{cases} \quad (43)$$

これは円周上の関数として、自然な関係式である。この境界条件のもとで、方程式(A,B,C)はまとめて

$$(Eq.1): f(x_1 - 1, x_2) + f(x_1, x_2 - 1) + f(x_1 + 1, x_2) + f(x_1, x_2 + 1) = Ef(x_1, x_2), \quad (|x_1 - x_2| \geq 2). \quad (44)$$

と書くことができ、さらに(D,E,F,G)についても、

$$(Eq.2): f(x - 1, x + 1) + f(x, x + 2) + 2f(x, x + 1) = Ef(x, x + 1), \quad (x = 1, \dots, N), \quad (45)$$

と書き換えられる。

変数の拡張については、いっそのこと無限個の変数

$$f(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, \quad x_1 < x_2 < x_1 + N, \quad (46)$$

を導入して、境界条件

$$(B.C.): f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1 + N) = f(x_2 - N, x_1) \quad (47)$$

を課すとしても等価。結局、 $x_1 < x_2 < x_1 + N$ を満たす変数 $f(x_1, x_2)$ に対して、境界条件(B.C.)のもと、固有値方程式(Eq.1, Eq.2)を解く問題となる。

Bethe [1]に従って固有関数を見つける。(Eq.1)は相互作用項が存在せず、“平面波の2粒子状態”が解であることが期待される。例えば、任意の複素数 k_1, k_2 に対して

$$e^{ik_1x_1} e^{ik_2x_2}, \quad e^{ik_2x_1} e^{ik_1x_2} \quad (48)$$

は、いずれも(Eq.1)の $E = 2 \cos k_1 + 2 \cos k_2$ なる解である。しかし

$$f(x_2, x_1 + N) = e^{ik_2N} e^{ik_1x_2} e^{ik_2x_1} \quad (49)$$

であるので一般の (k_1, k_2) に対して境界条件を満たすことができない。そこで解の形を、 $k_1 \neq k_2$ に対して

$$g_{\mathbf{k}}(x_1, x_2) = c_1 e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + c_2 e^{i(k_2 x_1 + k_1 x_2)}, \quad x_1 < x_2 < x_1 + N, \quad (50)$$

と仮定して $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ 及び c_1, c_2 (の相対比) を(Eq.2), (B.C.)から決めることにする。 $g_{\mathbf{k}}(x_1, x_2)$ を(Eq.2)に代入すると,

$$g_{\mathbf{k}}(x-1, x+1) + g_{\mathbf{k}}(x, x+2) + 2g_{\mathbf{k}}(x, x+1) = E_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(x, x+1) \quad (51)$$

を得る。これを以下のように読み替える。まず、関数

$$h_{\mathbf{k}}(x) (= "g_{\mathbf{k}}(x, x)") := c_1 e^{i(k_1 x + k_2 x)} + c_2 e^{i(k_2 x + k_1 x)} = e^{i(k_1 + k_2)x} (c_1 + c_2) \quad (52)$$

を導入する。 $g_{\mathbf{k}}(x_1, x_2)$ は定義域を外れた任意の (x_1, x_2) に対して(Eq.1)を満たすことに注意すると、関係式

$$g_{\mathbf{k}}(x-1, x+1) + h_{\mathbf{k}}(x) + h_{\mathbf{k}}(x+1) + g_{\mathbf{k}}(x, x+2) = E_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(x, x+1) \quad (53)$$

が成立する。これを用いると、方程式(51)は

$$h_{\mathbf{k}}(x) + h_{\mathbf{k}}(x+1) - 2g_{\mathbf{k}}(x, x+1) = 0, \quad (54)$$

つまり、

$$(1 + e^{i(k_1 + k_2)})c_1 + (1 + e^{i(k_1 + k_2)})c_2 - 2c_1 e^{ik_2} - 2c_2 e^{ik_1} = 0 \quad (55)$$

と等価。これを解いて相対比

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_1}}{1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_2}} \quad (56)$$

を得る。($c_2 \neq 0$ と仮定した。)

境界条件(B.C.)は $g_{\mathbf{k}}(x_2, x_1 + N) = g_{\mathbf{k}}(x_1, x_2)$ より、

$$(c_1 - c_2 e^{ik_1 N})e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + (c_2 - c_1 e^{ik_2 N})e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1)} = 0, \quad x_1 < x_2 < x_1 + N. \quad (57)$$

任意の $x_1 < x_2 < x_1 + N$ に対して成立する条件は、仮定 $k_1 \neq k_2$ に注意すると、

$$\begin{cases} c_1 = c_2 e^{ik_1 N}, \\ c_2 = c_1 e^{ik_2 N}, \end{cases} \quad (58)$$

である。

以上より、未知変数 (k_1, k_2) を決める2個の方程式 (Bethe方程式)

$$e^{ik_1 N} = -\frac{1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_1}}{1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_2}}, \quad (59)$$

$$e^{ik_2 N} = -\frac{1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_2}}{1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_1}}, \quad (60)$$

が得られた。ただし、 $k_1 \neq k_2$ に注意。

$\varphi_{\mathbf{k}}$ のため k_1, k_2 は通常の波数の表式を取らないが、

$$e^{i(k_1 + k_2)N} = 1 \quad (61)$$

に注意すると、和については

$$k_1 + k_2 = \frac{2\pi(\lambda_1 + \lambda_2)}{N} \quad (62)$$

が成立する。 $k_1 + k_2$ は並進演算子の固有値に他ならない。

1.2.3 $k_1 = k_2$ の場合

$k_1 = k_2 = k$ の場合に仮設解を

$$g_{k,k}(x_1, x_2) = e^{ik(x_1+x_2)} \quad (63)$$

とすると, (Eq.1), (Eq.2)はそれぞれ

$$E = 4 \cos k, \quad 2 \cos k + 2 = E, \quad (64)$$

となり, $k = 0$, つまり定数解 $f(x_1, x_2) = \text{const.}$ を得る. $k = 0$ 解については, $SU(2)$ 対称な場合の特殊性であることに注意. XXZ模型において $\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$ の係数を Δ 倍すると方程式は

$$\cos k = \Delta \quad (65)$$

となり,

- $\Delta < -1$ のときは解無し.
- $\Delta = -1$ のときは $k = \pi$ の単一解.
- $-1 < \Delta < 1$ の場合は k は 2 つの実数解 $k = \pm \cos^{-1}(\Delta)$.
- $\Delta = 1$ の場合は $k = 0$ の単一解.
- $\Delta > 1$ の場合は 2 つの純虚数解 $k = \pm \cosh^{-1}(\Delta)$.

という振る舞いをする.

一方で, 境界条件(B.C.)より,

$$e^{ikN} = 1 \quad (66)$$

であるので, 純虚数解は実現せず, $-1 \leq \Delta \leq 1$ の場合は Δ が N で決まる特定の値でのみ解となる.

XXX模型 ($\Delta = 1$) の場合は

- N に依らず $k = 0$ なる定数解がひとつ存在する.

1.2.4 Bethe方程式の対称性

Bethe方程式の性質をいくつか見ておく.

$$e^{i\varphi_k} = \frac{c_1}{c_2} = -\frac{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_1}}{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_2}}, \quad k_1 \neq k_2, \quad (67)$$

と置く.

$$e^{i\varphi_{k_2, k_1}} = e^{-i\varphi_{k_1, k_2}}, \quad (68)$$

$$e^{i\varphi_{-k_1, -k_2}} = e^{i\varphi_{k_2, k_1}} = e^{-i\varphi_{k_1, k_2}}, \quad (69)$$

$$[e^{i\varphi_{k_1, k_2}}]^* = e^{i\varphi_{k_2^*, k_1^*}} = e^{-i\varphi_{k_1^*, k_2^*}}, \quad (70)$$

$$e^{i\varphi_{k, k}} = -1, \quad (71)$$

$$e^{i\varphi_{0, k_2}} = e^{i\varphi_{k_1, 0}} = 1, \quad (72)$$

などに注意する。 k についての関数 $e^{i\varphi_{\mathbf{k}}}$ は $k=0$ において不連続である点に注意。

$$f_1(k_1, k_2) = e^{ik_1 N - \varphi_{k_1, k_2}}, \quad f_2(k_1, k_2) = e^{ik_2 N + \varphi_{k_1, k_2}} \quad (73)$$

と置くと、Bethe方程式は

$$f_1(k_1, k_2) = f_2(k_1, k_2) = 1. \quad (74)$$

さて $f_1(k_2, k_1) = f_2(k_1, k_2)$, $f_2(k_2, k_1) = f_1(k_1, k_2)$ より、

- 方程式は入れ替え $(k_1, k_2) \rightarrow (k_2, k_1)$ について対称。つまり、 (k_1, k_2) が解 $\Leftrightarrow (k_2, k_1)$ が解。(そもそも Bethe 仮設解 $g_{\mathbf{k}}$ は 2 つの異なる波数の組 (k_1, k_2) によって指定された。)

$f_1(-k_1, -k_2) = f_1(k_1, k_2)^{-1}$, $f_2(-k_1, -k_2) = f_2(k_1, k_2)^{-1}$ より

- 方程式は入れ替え $(k_1, k_2) \rightarrow (-k_1, -k_2)$ について対称。つまり、 (k_1, k_2) が解 $\Leftrightarrow (-k_1, -k_2)$ が解。これは系の反転対称性から来ると思われる。

$f_1(k_1, k_2)^* = f_1(k_1^*, k_2^*)^{-1}$, $f_2(k_1, k_2)^* = f_2(k_1^*, k_2^*)^{-1}$ より

- 方程式は入れ替え $(k_1, k_2) \rightarrow (k_1^*, k_2^*)$ について対称。つまり、 (k_1, k_2) が解 $\Leftrightarrow (k_1^*, k_2^*)$ が解。
- 解は“PT対称性の破れ”の性質を持つことに注意する。つまり、XXX模型を拡張してパラメータ依存した模型を考えた際に、この対称性を保つ限り、複素数解は2つの実数解の衝突によって生成される。

$f_1(k, k) = f_2(k, k) = -1$ より、

- $k_1 = k_2 = \frac{2\pi(n-1/2)}{N}$, $n = 1, \dots, N$ は解。

$f_1(0, k_2) = 1$, $f_2(0, k_2) = e^{ik_2 N}$ より

- $(k_1, k_2) = (0, \frac{2\pi n}{N})$, $n = 0, \dots, N-1$, は解。

1.2.5 実数解

Bethe [1]に従って、 k_1, k_2 が実の場合に、独立な解の個数を計算する。

$$e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} = -\frac{e^{-i(k_1+k_2)/2} + e^{i(k_1+k_2)/2} - 2e^{i(k_1-k_2)/2}}{e^{-i(k_1+k_2)/2} + e^{i(k_1+k_2)/2} - 2e^{-i(k_1-k_2)/2}} = -\frac{\cos \frac{k_1+k_2}{2} - e^{-i(k_2-k_1)/2}}{\cos \frac{k_1+k_2}{2} - e^{i(k_2-k_1)/2}} \quad (75)$$

と変形すれば明らかであるが、 k_1, k_2 が実数の場合は $\varphi_{\mathbf{k}}$ も実である。Bethe方程式は

$$\begin{cases} Nk_1 - \varphi_{\mathbf{k}} = 0 \pmod{2\pi}, \\ Nk_2 + \varphi_{\mathbf{k}} = 0 \pmod{2\pi}, \end{cases} \quad (76)$$

と書き換えられる。 $\varphi_{\mathbf{k}}$ の性質を調べると、

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \pi + 2\arg\left(\cos \frac{k_1+k_2}{2} - e^{-i(k_2-k_1)/2}\right) \quad (77)$$

$$= \pi + 2\arg\left(-2\sin \frac{k_1}{2} \sin \frac{k_2}{2} + i \sin \frac{k_2-k_1}{2}\right) \quad (78)$$

$$= \pi + 2\arg\left(2\sin \frac{k_1}{2} \sin \frac{k_2}{2} - i \sin \frac{k_2-k_1}{2}\right) \pmod{2\pi}, \quad (79)$$

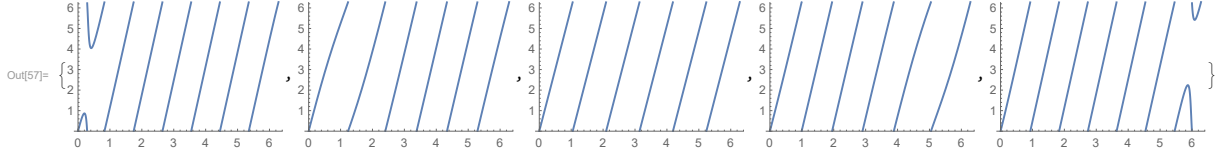


Figure 2: 関数 $Nk_1 - \varphi_{\mathbf{k}} \bmod 2\pi$. $N = 7$ とした. 左から $k_2 = \pi/10, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi - \pi/10$.

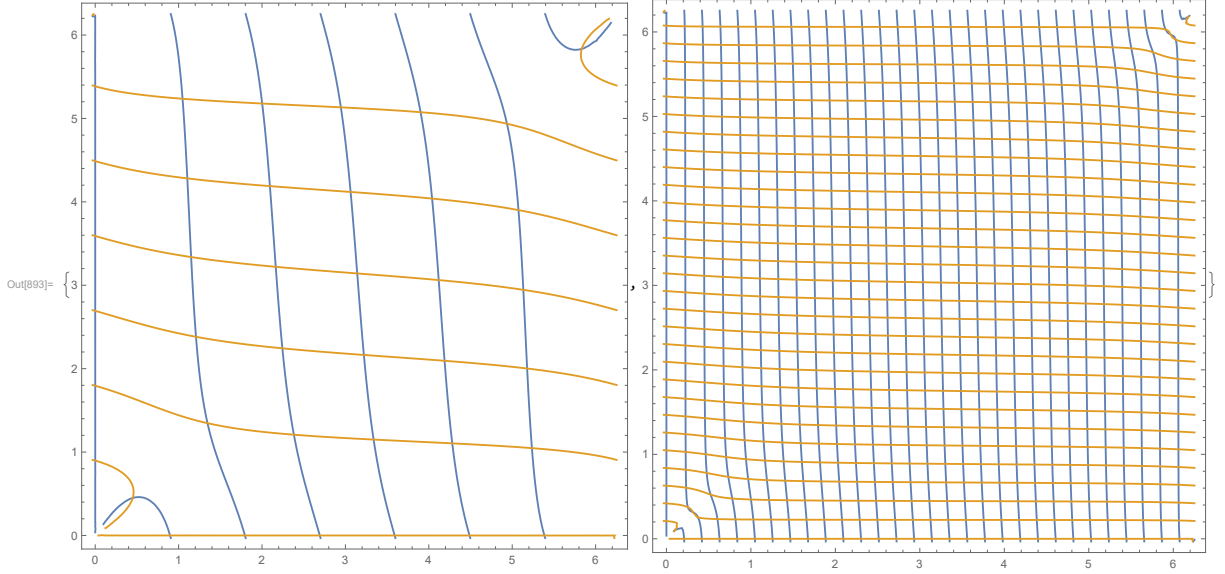


Figure 3: $Nk_1 - \varphi_{\mathbf{k}} \equiv 0$ (青線), $Nk_2 + \varphi_{\mathbf{k}} \equiv 0$ (黄線)の解曲線. 横軸が k_1 , 縦軸が k_2 . 精度はMachinePrecision. 解 (k_1, k_2) は2つの解曲線の交わりで得られる. それぞれ $N = 7, 30$ とした.

より, $k_1 = 0 \rightarrow k_2 \rightarrow 2\pi$ と変化させると $\varphi_{\mathbf{k}}$ は $\varphi_{0,k_2} = 0 \rightarrow \varphi_{k_2,k_2} = \pi \rightarrow \varphi_{2\pi,k_2} = 2\pi$ と単調に増加する. すると任意の k_2 に対して関数 $Nk_1 - \varphi_{\mathbf{k}}$ は k_1 を0から 2π まで1周させたときに $N - 1$ 回の巻き付きを有するので, k_1 に関する方程式 $Nk_1 - \varphi_{\mathbf{k}} \equiv 0$ は k_2 の依存せず少なくとも $N - 1$ 個の解を持つ. 一般には k_2 の変形に対して不安定な偶数個の解がさらに存在する場合もあることに注意. 図2に $N = 7$ の場合において k_2 をいくつか選んだ場合の関数 $Nk_1 - \varphi_{\mathbf{k}}$ のプロットを示す. 図2を見ると, k_2 が $0 = 2\pi$ に近いときに k_1 の解が複数生じる傾向にある.

巻き付き数で保護されない不安定解はBethe方程式の解に寄与するだろうか. そこで式 $Nk_1 - \varphi_{\mathbf{k}}, Nk_2 + \varphi_{\mathbf{k}}$ のゼロ点を図3に図示した. 図を見ると, $k_1 = 0$ において $k_2 > 0$ なる最小の $(k_1 = 0, k_2^{\min})$ は巻き付き数で固定されない不安定ゼロ点から生じていることがわかる. さらにこの解 $(0, k_2^{\min})$ の N に対する存在の安定性について考えると, $(k_1, k_2) = (\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N})$ が解であるため, 解 $(0, k_2^{\min})$ は任意の N に対して残ると考えられる.

図3右図の $k_1 = k_2 = \frac{2\pi(2-1/2)}{N}$ 近傍のような交点を数値精度のため真の解ではない, と仮定する (間違いであることが後で分かる.) と, $0 \leq k_1 < k_2 < 2\pi$ なる解の個数は

$$\left(\sum_{n=1}^{N-2} n \right) + 1 = \frac{(N-1)(N-2)}{2} + 1 \quad (80)$$

となる. これはBetheの見積もり [1]である $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ と, 不安定ゼロ点からの寄与だけ合わない. 以下, Betheの議論もメモしておく.

1.2.6 Betheによる実数解の個数の見積もり

[1]の議論を追う.

解は

$$k_1 = \frac{2\pi\lambda_1}{N} + \frac{\varphi_{\mathbf{k}}}{N}, \quad (81)$$

$$k_2 = \frac{2\pi\lambda_2}{N} - \frac{\varphi_{\mathbf{k}}}{N}, \quad (82)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = 0, \dots, N-1. \quad (83)$$

$\varphi_{\mathbf{k}}$ は

$$-\pi \leq \varphi_{\mathbf{k}} \leq \pi \quad (84)$$

として良い.

$$k_2 - k_1 = \frac{2\pi(\lambda_2 - \lambda_1)}{N} - \frac{2\varphi_{\mathbf{k}}}{N} \quad (85)$$

であるので, $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_2 - 2$ においては $0 \leq k_1 < k_2$ は満たされているが, $\lambda_1 = \lambda_2 - 1$ の場合に $k_1 < k_2$ が満たされない可能性がある. 実際, 形式的に $k_1 = k_2$ の場合に Bethe方程式 $e^{i(k_1 N - \varphi_{\mathbf{k}})} = e^{i(k_2 N + \varphi_{\mathbf{k}})} = 1$ を解くと, 解 $\varphi_{\mathbf{k}} = \pi, \lambda_1 = \lambda_2 - 1$ が得られる. (Bethe方程式 $e^{ik_1 N} = e^{i\varphi_{\mathbf{k}, k_2}}$ を k_2 を固定したときに k_1 を決定する方程式とみなした場合に, $\varphi_{\mathbf{k}}$ の $0 \leq k_1 \leq k_2$ における単調性より分岐 λ_1 を固定したときの解は高々ひとつであることがわかるので, $\lambda_1 = \lambda_2 - 1$ は解として不適.) 以上より, 仮設解 $g_{\mathbf{k}}(x_1, x_2)$ の独立な解の個数がわかった.

$$\sum_{\lambda_2=2}^{N-1} \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_2-2} = \sum_{\lambda_2=2}^{N-1} (\lambda_2 - 1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2}. \quad (86)$$

この議論は, $\varphi_{\mathbf{k}}$ の $k_1 = 0$ における特異的な振る舞いにより, $\lambda_2 = 1$ の場合は $\lambda_1 = 0$ の解が存在して良い点を見落としている. 実際, $k_1 = 0, k_1 < k_2$ とすると Bethe方程式は $\lambda_1 = 0$, 及び

$$k_2 = \frac{2\pi\lambda_2}{N}. \quad (87)$$

これは $\lambda_2 = 1, \dots, N-1$ の解を持つ.

1.2.7 複素共役解

実数解の数は $\frac{(N-1)(N-2)}{2} + 1$ であり, 定数解の数は N が偶数のときは1個, N が奇数のときは0個であった. $M = 2$ のヒルベルト空間の次元は $\frac{N(N-1)}{2}$ であるので, 解の数が, N が偶数のときは $N-2$ 個, N が奇数のときは $N-3$ 個足りない.

全運動量 $k_1 + k_2$ は実数であるので, K を実数として,

$$\begin{cases} k_1 = u + k, \\ k_2 = u - k, \end{cases} \quad (88)$$

と置いて良い. [1]に従って, まずは k_1, k_2 が複素共役の関係にある解を探す. つまり, v を実数として $k = iv$ と置く. $v > 0$ のみ調べれば十分.

$$e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} = -\frac{\cos \frac{k_1+k_2}{2} - e^{-i(k_2-k_1)/2}}{\cos \frac{k_1+k_2}{2} - e^{i(k_2-k_1)/2}} = -\frac{\cos u - e^{-v}}{\cos u - e^v} \quad (89)$$

に注意する。 Bethe方程式は

$$\begin{cases} e^{iuN-vN} = e^{i\varphi_k} = -\frac{\cos u - e^{-v}}{\cos u - e^v}, \\ e^{iuN+vN} = e^{-i\varphi_k} = -\frac{\cos u - e^v}{\cos u - e^{-v}}. \end{cases} \quad (90)$$

つまり，関数

$$F(u, v) := \frac{e^v - \cos u}{e^{-v} - \cos u} \quad (91)$$

を導入して，

$$e^{iuN} = -\text{Sign}F(u, v), \quad (92)$$

$$Nv = \log |F(u, v)|. \quad (93)$$

2つ目の方程式(93)は

$$\frac{e^v - \cos u}{e^{-v} - \cos u} = e^{2v} \frac{e^{-v} - \cos u e^{-2v}}{e^{-v} - \cos u} \quad (94)$$

と変形すると， $-\cos u \geq 0$ のとき $N > 2$ の場合は $v = 0$ 以外の解を持たないことが分かる。従って， $\cos u > 0$ なる領域のみ考えれば良い。また $\cos u = 1$ のとき $\log |F(u, v)| = v$ より， $N > 1$ の場合は解が存在しない。よって $0 < \cos u < 1$ のみ考えれば良く，このとき関数 $\log |F(u, v)|$ は $v = -\log \cos u$ において正に発散し， $v + \text{const.}$ に漸近する。また，

$$\partial_v \log F(u, v) = \frac{e^v(e^{-v} - \cos u) + (1 - e^{-v} \cos u)}{(e^v - \cos u)(e^{-v} - \cos u)} > 0, \quad (0 < v < -\log \cos u), \quad (95)$$

$$\partial_v^2 \log F(u, v) = \frac{e^v(e^{2v} - 1) \cos u \sin^2 u}{(e^v - \cos u)^2 (e^v \cos u - 1)^2} > 0, \quad (0 < v < -\log \cos u), \quad (96)$$

より， $0 < v < \log \cos u$ において下に凸で単調に増加する。 $v = 0$ における傾きは $\frac{2}{1 - \cos u}$ であるので，

- $N < \frac{2}{1 - \cos u}$ である場合は $v \gtrsim -\log \cos u$ においてひとつの交点を持つ。
- $N > \frac{2}{1 - \cos u}$ である場合は $v \lesssim -\log \cos u, v \gtrsim -\log \cos u$ においてそれぞれひとつの交点を持つ。

さらに1つ目の方程式(92)から u を決める。 $e^{2iuN} = 1$ であるので必要条件として

$$u = \frac{\pi n}{N}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (97)$$

である。このとき $e^{iuN} = (-1)^n$ であるので， (u, v) が解であれば $(-u, v)$ も解であることに注意。 $e^v - \cos u > 0$ であるので，(92)の右辺の符号変化は(93)の右辺の発散点である $v = -\log \cos u$ で生じる。条件 $0 < \cos u < 1$ より

- N が奇数の場合は $u_n = \pm \frac{\pi n}{N}, n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$,
- N が偶数の場合は $u_n = \pm \frac{\pi n}{N}, n = 1, \dots, \frac{N-2}{2}$,

が解の候補。 $N = 7, 20$ における関数 Nv と $\log |F(u, v)|$ の $u = u_n, n = 1, \dots, \text{Floor}[\frac{N-1}{2}]$ を図4に図示した。方程式(92)は

$$(-1)^n = \begin{cases} -1 & (0 < v < -\log \cos u_n), \\ 1 & (-\log \cos u_n < v), \end{cases} \quad (98)$$

であるので，

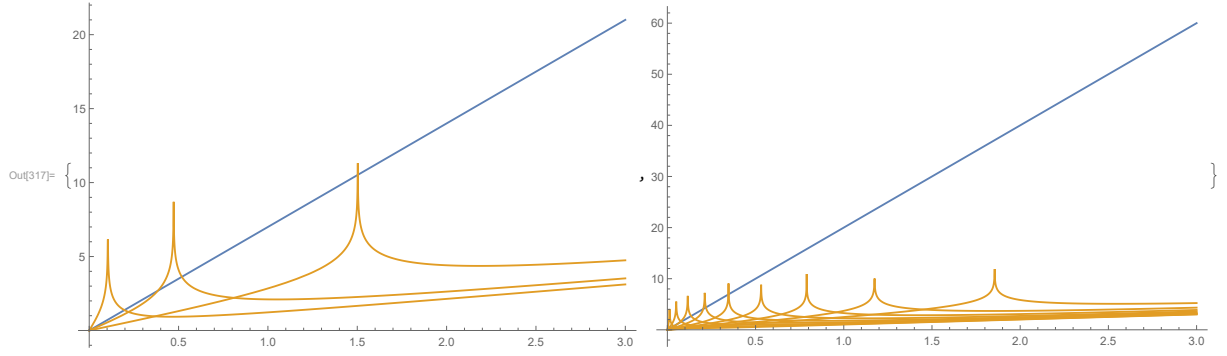


Figure 4: $N = 7$ (左図), $N = 20$ (右図) における関数 Nv (青) と関数 $\log |F(u, v)|$ (黄) の $u = u_n$ の $n = 1, \dots, \text{Floor}(\frac{N-1}{2})$ のプロット.

- n が奇数のときは $0 < v < -\log \cos u_n$,
- n が偶数のときは $-\log \cos u_n < v$,

がそれぞれ解であるための条件. これを考慮すると

- n が奇数でかつ $N > \frac{2}{1 - \cos u_n}$ が満たされている場合は $v \lesssim -\log \cos u_n$ においてひとつの解を持つ.
- n が奇数でかつ $N < \frac{2}{1 - \cos u_n}$ が満たされている場合は解が存在しない.
- n が偶数の場合は $v \gtrsim -\log \cos u_n$ においてひとつの解を持つ.

条件 $N < \frac{2}{1 - \cos u_n}$ は

$$n < \frac{2N}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad (99)$$

と等価. これを満たす奇数 $n = 2m - 1, m = 1, 2, \dots$ の数は $\frac{N}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) + \frac{1}{2}$ を超えない最大の整数を M_N として, M_N 個. $N \gg 1$ のときは,

$$M_N \sim \frac{\sqrt{N}}{\pi} \quad (100)$$

である. M_N を計算すると,

$$M_N = \begin{cases} 1 & (N \leq 21) \\ 2 & (22 \leq N \leq 61) \\ 3 & (62 \leq N \leq 120) \\ 4 & (121 \leq N \leq 199) \\ 5 & (200 \leq N \leq 298) \\ 6 & (299 \leq N \leq 416) \\ \vdots & \end{cases} \quad (101)$$

などとなる. 例として, $N = 10, 21, 40$ における関数 $\log |F(u, v)|$ の $u = u_1, u_3$ を図5に示した.

以上より, 複素共役な解の数は, ($u = u_n, -u_n$ の寄与があるため2倍して)

- N が奇数のときは, $N - 1 - 2M_N$ 個.
- N が偶数のときは, $N - 2 - 2M_N$ 個.

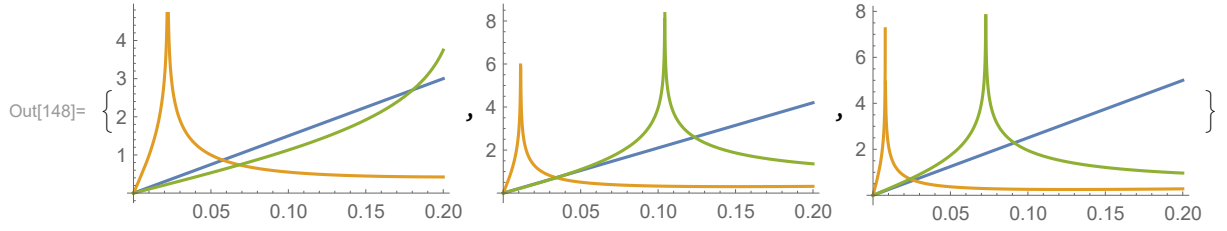


Figure 5: $N = 10, 21, 40$ における関数 Nv (青), $\log |F(u_1, v)|$ (黄), $\log |F(u_3, v)|$ (緑).

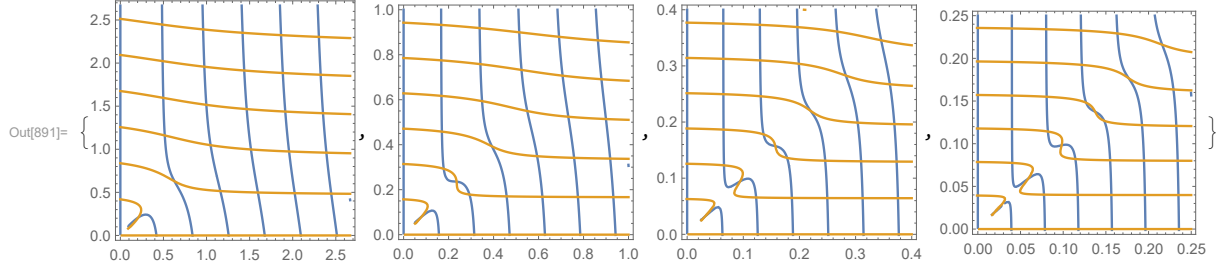


Figure 6: $Nk_1 - \varphi_k \equiv 0$ (青線), $Nk_2 + \varphi_k \equiv 0$ (黄線)の解曲線. 横軸が k_1 , 縦軸が k_2 .
 $(k_1, k_2) = (0, 0)$ 近傍のみ図示した. 左から $N = 15, 40, 100, 160$.

1.2.8 波数の近い実数解

解の数は, Hilbert空間の次元である $N(N-1)/2$ に対して, N が大きいところでおよそ $2M_N \sim \frac{2\sqrt{N}}{\pi}$ 個足りない. [3, 4]など見ると, さらに実数解が存在するようだ. 1.2.5節においては, $N = 20$ における $(k_1, k_2) = \frac{2\pi(2-1/2)}{N}, \frac{2\pi(N-1-1/2)}{N}$ 近傍の波数の近い交点を無視したが, これらは解である. 図6を見よ.

このような解がいつ出現するかを $k_1 = k_2 = \frac{2\pi(n-1/2)}{N}, n = 1, 2, 3, \dots$ 近傍をプロットして目で確かめると,

- $N = 22$ において $k_1 = k_2 = \pm \frac{2\pi(2-1/2)}{N}$ 近傍に出現.
- $N = 62$ において $k_1 = k_2 = \pm \frac{2\pi(3-1/2)}{N}$ 近傍に出現.
- $N = 121$ において $k_1 = k_2 = \pm \frac{2\pi(4-1/2)}{N}$ 近傍に出現.
- $N = 200$ において $k_1 = k_2 = \pm \frac{2\pi(5-1/2)}{N}$ 近傍に出現.
- $N = 299$ において $k_1 = k_2 = \pm \frac{2\pi(6-1/2)}{N}$ 近傍に出現.
- $N = 417$ において $k_1 = k_2 = \pm \frac{2\pi(7-1/2)}{N}$ 近傍に出現.

となった. これは, 新しい解が出現する N は, 前節の $M_N - 1$ と完全に一致している. よって, 波数が近い実数解の個数は,

$$2(M_N - 1) \tag{102}$$

で与えられる.

波数が近い解の個数の厳密に計算は保留する.

1.2.9 Bethe仮設解の数え上げ

以上をまとめると,

- 定数解はひとつ.
- 波数が離れている実数解の個数は $\frac{(N-1)(N-2)}{2} + 1$.
- 複素共役解の個数は
 - N が奇数の場合は $N - 1 - 2M_N$.
 - N が偶数の場合は $N - 2 - 2M_N$.
- 波数の近い実数解の個数は $2(M_N - 1)$.

よってBethe仮設解の数は

- N が奇数のときは, $\frac{N(N-1)}{2}$.
- N が偶数のときは, $\frac{N(N-1)}{2} - 1$.

となる. N が偶数の場合に, 解が不足している.

1.2.10 $N = 3$ の場合

$N = 3$ の場合は, $(k_1, k_2) = (0, 2\pi/3), (0, 4\pi/3)$ なる2つの実数解と定数解が存在する. 直接固有値方程式を解いてBethe仮設解と比較する. $\mathbf{f} = (f(1, 2), f(1, 3), f(2, 3))^T$ の変数があり, 固有値方程式は

$$\begin{cases} f(2, 3) + f(1, 3) + 2f(1, 2) = Ef(1, 2), \\ f(1, 2) + f(2, 3) + 2f(1, 3) = Ef(1, 3), \\ f(1, 3) + f(1, 2) + 2f(2, 3) = Ef(2, 3). \end{cases} \quad (103)$$

つまり,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{f} = E\mathbf{f}. \quad (104)$$

解くと以下の3つの解を得る.

$$\mathbf{f} = (1, 1, 1)^T, \quad E = 4, \quad (105)$$

$$\mathbf{f} = (1, 0, -1)^T, \quad E = 1, \quad (106)$$

$$\mathbf{f} = (1, -1, 0)^T, \quad E = 1. \quad (107)$$

これは定数解とBethe仮設解に対応する. ¹

1

$$g_{0, \frac{2\pi}{3}}(x_1, x_2) = e^{\frac{2\pi i}{3}x_1} + e^{\frac{2\pi i}{3}x_2} = (-1, e^{\pi i/3}, e^{-\pi i/3}), \quad (108)$$

$$g_{0, \frac{4\pi}{3}}(x_1, x_2) = e^{\frac{2\pi i}{3}x_1} + e^{\frac{2\pi i}{3}x_2} = (-1, e^{-\pi i/3}, e^{\pi i/3}). \quad (109)$$

の線形和.

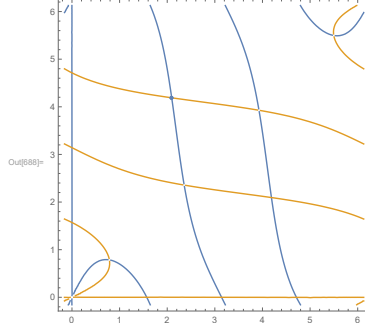


Figure 7: $N = 4$ のBethe方程式の実数解. $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ もプロットした.

1.2.11 $N = 4$ の場合

一方で, $N = 4$ の場合は, 上記議論から $(k_1, k_2) = (0, 2\pi/4), (0, 4\pi/4), (0, 6\pi/4), (2\pi/3, 4\pi/3)$ の4つの実数解と, ひとつの定数解が存在するが, Hilbert空間の次元である6には1個足りない. Bethe方程式の実数解については図7を見よ. 直接固有値方程式を解いてBethe仮設解と比較する.

$\mathbf{f} = (f(1, 2), f(1, 3), f(1, 4), f(2, 3), f(2, 4), f(3, 4))^T$ の変数があり, 固有値方程式は

$$\begin{cases} f(2, 4) + f(1, 3) + 2f(1, 2) = Ef(1, 2), \\ f(3, 4) + f(1, 2) + f(2, 3) + f(1, 4) = Ef(1, 3), \\ f(1, 3) + f(2, 4) + 2f(1, 4) = Ef(1, 4), \\ f(1, 3) + f(2, 4) + 2f(2, 3) = Ef(2, 3), \\ f(1, 4) + f(2, 3) + f(3, 4) + f(1, 2) = Ef(2, 4), \\ f(2, 4) + f(1, 3) + 2f(3, 4) = Ef(3, 4), \end{cases} \quad (110)$$

つまり,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{f} = E\mathbf{f}. \quad (111)$$

解くと以下の6つの解を得る.

$$\mathbf{f} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T, \quad E = 4, \quad (112)$$

$$\mathbf{f} = (1, -2, 1, 1, -2, 1)^T, \quad E = -2, \quad (113)$$

$$\mathbf{f} = (0, -1, 0, 0, 1, 0)^T, \quad E = 0, \quad (114)$$

$$\mathbf{f} = (-1, 0, 0, 0, 0, 1)^T, \quad E = 2, \quad (115)$$

$$\mathbf{f} = (-1, 0, 0, 1, 0, 0)^T, \quad E = 2, \quad (116)$$

$$\mathbf{f} = (-1, 0, 1, 0, 0, 0)^T, \quad E = 2. \quad (117)$$

一方で,

$$\text{定数解: } \mathbf{f} = (1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad E = 4, \quad (118)$$

$$(k_1, k_2) = (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}): \mathbf{f} = (1, -2, 1, 1, -2, 1), \quad E = -2, \quad (119)$$

$$(k_1, k_2) = (0, \pi): \mathbf{f} = (0, -1, 0, 0, 1, 0), \quad E = 0, \quad (120)$$

$$(k_1, k_2) = (0, \frac{\pi}{2}): \mathbf{f} = (1, 0, -i, i, 0, -1), \quad E = 2, \quad (121)$$

$$(k_1, k_2) = (0, \frac{3\pi}{2}): \mathbf{f} = (1, 0, i, -i, 0, -1), \quad E = 2 \quad (122)$$

となり，確かに $E = 2$ なる解がひとつ足りない．

一般に，サイト数が偶数の場合に，以下の固有値方程式の解が存在する．²

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^N (-1)^j \sigma_j^- \sigma_{j+1}^- |0\rangle. \quad (123)$$

確かに，固有値方程式に代入すると上記 $|\psi\rangle$ が固有値 $E = 2$ なる解であることが確かめられる．解の不足は，(56)において分母がゼロである場合を考慮しなかったことが原因らしいが納得できていない．例えば，[5]に解説がある．次節にメモを残す．

1.2.12 Bethe方程式の“特異解”

$$e^{ik_j} = \frac{\lambda_j + i}{\lambda_j - i}, \quad j = 1, 2, \quad (124)$$

と λ_j を導入すると，

$$1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_1} = \frac{-2i(\lambda_2 - \lambda_1 - 2i)}{(\lambda_1 - i)(\lambda_2 - i)}, \quad (125)$$

$$1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_2} = \frac{-2i(\lambda_1 - \lambda_2 - 2i)}{(\lambda_1 - i)(\lambda_2 - i)} \quad (126)$$

に注意して，Bethe方程式は

$$\left(\frac{\lambda_1 + i}{\lambda_1 - i}\right)^N = -\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 2i}{\lambda_1 - \lambda_2 - 2i}, \quad (127)$$

$$\left(\frac{\lambda_2 + i}{\lambda_2 - i}\right)^N = -\frac{\lambda_1 - \lambda_2 - 2i}{\lambda_2 - \lambda_1 - 2i} \quad (128)$$

となる．分母がゼロの場合は特異的なので，分母を払って

$$(\lambda_1 + i)^N (\lambda_1 - \lambda_2 - 2i) = -(\lambda_1 - i)^N (\lambda_2 - \lambda_1 - 2i), \quad (129)$$

$$(\lambda_2 + i)^N (\lambda_2 - \lambda_1 - 2i) = -(\lambda_2 - i)^N (\lambda_1 - \lambda_2 - 2i) \quad (130)$$

とすると解

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \quad (131)$$

を持つ．対応する固有値，固有ベクトルは適当な正規化の下で $|\psi\rangle$ ， $E = 2$ を与えることが知られている．[5]

1.2.13 解が共役な複素数で与えられること

$\{k_1, k_2\}$ が Bethe 方程式の解であれば $\{k_1^*, k_2^*\}$ も解であることは Bethe 方程式の複素共役に対する対称性から得られるが，実際は集合として $\{k_1, k_2\} = \{k_1^*, k_2^*\}$ が成立する．一般の M に対して，[7]において転送行列を用いた証明がなされている．また，[6]においては，Bethe 方程式の複素共役に対する対称性から複素解については $k_2 = k_1^*$ として良い，とのみ書かれているが，本当だろうか．

²桂法称氏に教えて頂きました．ありがとうございます．

$M = 2$ については、運動量とエネルギーが実数であることを用いて以下のように証明できる。³ $k_1 + k_2$ は全運動量であるので実数であり、特に $\text{Im } k_1 + \text{Im } k_2 = 0$. $\text{Im } k_1 = -\text{Im } k_2 \neq 0$ である場合に $\text{Re } k_1 = \text{Re } k_2$ を示したい。エネルギー

$$E_{\mathbf{k}} = 2 \cos k_1 + 2 \cos k_2 = 4 \cos \frac{k_1 + k_2}{2} \cos \frac{k_1 - k_2}{2} \quad (132)$$

の虚部は

$$\text{Im } E_{\mathbf{k}} = -4 \cos \frac{k_1 + k_2}{2} \sin \frac{\text{Re}(k_1 - k_2)}{2} \sinh \frac{\text{Im}(k_1 - k_2)}{2}. \quad (133)$$

ハミルトニアンエルミート性より $\text{Im } E_{\mathbf{k}} = 0$ であるので、 $\text{Im } k_1 = \text{Im } k_2 \neq 0$ の仮定のもと、 $k_1 + k_2 = \pi \pmod{2\pi}$, または $\text{Re}(k_1 - k_2) = 0$. よって $k_1 + k_2 \neq \pi \pmod{2\pi}$ の場合は示された。

$k_1 + k_2 = \pi$ の場合を考える。このときBethe方程式は

$$e^{ik_1 N} = -\frac{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_1}}{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_2}} = e^{2ik_1}, \quad (134)$$

$$e^{ik_2 N} = -\frac{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_2}}{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_1}} = e^{2ik_2}, \quad (135)$$

N が偶数のとき解が存在し、

$$(k_1, k_2) = \left(\frac{2\pi n}{N-2}, \pi - \frac{2\pi n}{N-2} \right), \quad n = 0, \dots, N-3 \quad (136)$$

である。よって $k_1 + k_2 = \pi$ の場合は複素数解は存在しない。

1.2.14 既存の結果と比較

[6]によって、1.2.7, 1.2.8節で議論した、 M_N 個の複素共役解の不足と、それに伴う波数の近い実数解の出現が指摘されている。本ノートは[6]の計算と一致している。

1.2.15 複素共役解のスペクトル

N が大きいときの複素共役解のスペクトルを計算する。 $2M \sim \frac{2\sqrt{N}}{\pi}$ 個の例外を無視して、さらに $(u, v) = (u_n, -\log \cos u_n)$ を近似解とすると、解 (k_1, k_2) は大雑把に

$$k_1 = k - i \log \cos k, \quad (137)$$

$$k_2 = k + i \log \cos k, \quad (138)$$

$$k = \frac{\pi n}{N}, \quad n = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{n} + 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (139)$$

で与えられる。エネルギー固有値は

$$E(k_1, k_2) = 2 \cos k_1 + 2 \cos k_2 = e^{ik_1} + e^{-ik_1} + e^{ik_2} + e^{-ik_2} \quad (140)$$

$$= e^{ik} \cos k + e^{-ik} (\cos k)^{-1} + e^{ik} (\cos k)^{-1} + e^{-ik} \cos k \quad (141)$$

$$= 2 \cos^2 k + 2 = \cos 2k + 4, \quad -\frac{\pi}{2} < k < \frac{\pi}{2}. \quad (142)$$

³この証明も桂法称氏に教えて頂きました。

1.2.16 buck up

複素数解について考える。[1]の議論を追う。Bethe方程式を少し変形しておく。

$$e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} = -\frac{\cos \frac{k_1+k_2}{2} - e^{-i(k_2-k_1)/2}}{\cos \frac{k_1+k_2}{2} - e^{i(k_2-k_1)/2}} = -\frac{\cos \frac{k_1+k_2}{2} - \cos \frac{k_1-k_2}{2} - i \sin \frac{k_1-k_2}{2}}{\cos \frac{k_1+k_2}{2} - \cos \frac{k_1-k_2}{2} + i \sin \frac{k_1-k_2}{2}} \quad (143)$$

より

$$\cot \frac{\varphi_{\mathbf{k}}}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\varphi_{\mathbf{k}}}{2}} = \frac{\sin \varphi_{\mathbf{k}}}{1 - \cos \varphi_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{i} \frac{e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} - e^{-i\varphi_{\mathbf{k}}}}{2 - e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} - e^{-i\varphi_{\mathbf{k}}}} = \frac{\sin \frac{k_1-k_2}{2}}{\cos \frac{k_1+k_2}{2} - \cos \frac{k_1-k_2}{2}} = \frac{1}{2} \left(\cot \frac{k_1}{2} - \cot \frac{k_2}{2} \right), \quad (144)$$

つまり,

$$2 \cot \frac{\varphi_{\mathbf{k}}}{2} = \cot \frac{k_1}{2} - \cot \frac{k_2}{2} \quad (145)$$

を得る.

$$k_1 = u + iv, \quad k_2 = u - iv \quad (146)$$

と置く。全運動量 $k_1 + k_2$ は実であるので、 u は実。 v は複素数である。

$$\cot \frac{k_1}{2} = \frac{\cos \frac{u+iv}{2}}{\sin \frac{u+iv}{2}} = \frac{\cos \frac{u}{2} \cos \frac{iv}{2} - \sin \frac{u}{2} \sin \frac{iv}{2}}{\sin \frac{u}{2} \cos \frac{iv}{2} + \cos \frac{u}{2} \sin \frac{iv}{2}} = \frac{\cos \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2} - i \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}}{\sin \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2} + i \cos \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}} \quad (147)$$

$$= \frac{(\cos \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2} - i \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2})(\sin \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2} - i \cos \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2})}{\sin^2 \frac{u}{2} \cosh^2 \frac{v}{2} + \cos^2 \frac{u}{2} \sinh^2 \frac{v}{2}} \quad (148)$$

$$= \frac{\cos \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} - i \cosh \frac{v}{2} \sinh \frac{v}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2} \cosh^2 \frac{v}{2} + \cos^2 \frac{u}{2} \sinh^2 \frac{v}{2}} \quad (149)$$

$$= \frac{2 \sin u - 2i \sinh v}{(1 - \cos u)(1 + \cosh v) + (1 + \cos u)(\cosh v - 1)} \quad (150)$$

$$= \frac{\sin u - i \sinh v}{\cosh v - \cos u}. \quad (151)$$

$v \mapsto -v$ として

$$\cot \frac{k_2}{2} = \frac{\sin u + i \sinh v}{\cosh v - \cos u}. \quad (152)$$

v は一般には複素数であるが、以下、 v を実とする。つまり、 k_1, k_2 は複素共役の関係にあるとする。 $v > 0$ のみ考えれば十分。

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \psi_{\mathbf{k}} + i\chi_{\mathbf{k}} \quad (153)$$

と実部と虚部分ける。するとBethe方程式は

$$\psi_{\mathbf{k}} \equiv -\psi_{\mathbf{k}} \pmod{2\pi}, \quad (154)$$

$$Nv = \chi_{\mathbf{k}} \quad (155)$$

となる。

2 開放端条件

Bethe仮設法は、 $|x_2 - x_1| > 1$ における自由場解を $|x_2 - x_1| = 1$ に接続することにより得られるため、素朴には開放端条件においても適用できると思われる。開放端条件におけるハミルトニアンは

$$H = \sum_{j=1}^{N-1} (\sigma_{j+1}^- \sigma_j^+ + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ + 2 \frac{1 - \sigma_j^z}{2} \frac{1 - \sigma_{j+1}^z}{2}). \quad (156)$$

固有値方程式

$$H |f\rangle_M = E |f\rangle_M \quad (157)$$

の構造をみていく。

2.1 $M = 1$

$M = 1$ の場合は第3項が落ち、

$$H |f\rangle_1 = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{x=1}^N (\delta_{jx} \sigma_{j+1}^- + \delta_{j+1,x} \sigma_j^-) f(x) |0\rangle \quad (158)$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} (f(j) \sigma_{j+1}^- + f(j+1) \sigma_j^-) |0\rangle \quad (159)$$

$$= \sum_{j=2}^N f(j-1) \sigma_j^- |0\rangle + \sum_{j=1}^{N-1} f(j+1) \sigma_j^- |0\rangle. \quad (160)$$

これから固有値方程式

$$\begin{cases} f(j-1) + f(j+1) = Ef(j) & j = 2, \dots, N-1, \\ f(2) = Ef(1), \\ f(N-1) = Ef(N), \end{cases} \quad (161)$$

を得る。 $f(0), f(N+1)$ を変数に加えると、次と等価。

$$f(j-1) + f(j+1) = Ef(j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (162)$$

$$f(0) = f(N+1) = 0. \quad (163)$$

線形独立な N 個の解は、

$$f_k(x) = \sin \frac{\pi p x}{N+1}, \quad p = 1, \dots, N. \quad (164)$$

2.2 $M = 2$

飛び移り項について $x_1 \neq x_2$ のとき

$$\sigma_{j+1}^- \sigma_j^+ \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle = \delta_{jx_1} \sigma_{x_1+1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \delta_{jx_2} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2+1}^- |0\rangle, \quad (165)$$

$$\sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle = \delta_{j+1,x_1} \sigma_{x_1-1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \delta_{j+1,x_2} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2-1}^- |0\rangle, \quad (166)$$

に注意する. 同一サイトにおいて下降演算子が重なった場合は $\sigma_x^- \sigma_x^- = 0$ とする. これから,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sigma_{j+1}^- \sigma_j^+ |f\rangle_2 = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N} \sum_{j=1}^{N-1} f(x_1, x_2) (\delta_{jx_1} \sigma_{x_1+1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \delta_{jx_2} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2+1}^- |0\rangle) \quad (167)$$

$$= \sum_{1 \leq x_1 < x_2-1 \leq N-1} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1+1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N-1} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2+1}^- |0\rangle \quad (168)$$

$$= \sum_{2 \leq x_1 < x_2 \leq N} f(x_1 - 1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{1 \leq x_1 < x_2-1 \leq N-1} f(x_1, x_2 - 1) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle, \quad (169)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ |f\rangle_2 = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N} \sum_{j=1}^{N-1} f(x_1, x_2) (\delta_{j+1, x_1} \sigma_{x_1-1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \delta_{j+1, x_2} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2-1}^- |0\rangle) \quad (170)$$

$$= \sum_{2 \leq x_1 < x_2 \leq N} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1-1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{1 \leq x_1 < x_2-1 \leq N-1} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2-1}^- |0\rangle \quad (171)$$

$$= \sum_{1 \leq x_1 < x_2-1 \leq N-1} f(x_1 + 1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N-1} f(x_1, x_2 + 1) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle. \quad (172)$$

相互作用項は,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \sigma_j^z}{2} \frac{1 - \sigma_{j+1}^z}{2} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle = \delta_{x_1+1, x_2} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \quad (173)$$

より

$$\sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N} \sum_{j=1}^{N-1} 2 \frac{1 - \sigma_j^z}{2} \frac{1 - \sigma_{j+1}^z}{2} |f\rangle_2 = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N} f(x_1, x_2) 2 \delta_{x_1+1, x_2} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \quad (174)$$

$$= \sum_{x=1}^{N-1} f(x, x+1) 2 \sigma_x^- \sigma_{x+1}^- |0\rangle. \quad (175)$$

よって, ハミルトニアン H の波動関数 $|f\rangle_2$ への作用は

$$H |f\rangle_2 = \sum_{2 \leq x_1 < x_2 \leq N} f(x_1 - 1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{1 \leq x_1 < x_2-1 \leq N-1} f(x_1, x_2 - 1) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \quad (176)$$

$$+ \sum_{1 \leq x_1 < x_2-1 \leq N-1} f(x_1 + 1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N-1} f(x_1, x_2 + 1) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \quad (177)$$

$$+ \sum_{x=1}^{N-1} f(x, x+1) 2 \sigma_x^- \sigma_{x+1}^- |0\rangle \quad (178)$$

となる. 固有値方程式は

- $2 \leq x_1, x_1 + 1 \leq x_2 \leq N - 1$ のとき (黄色) は,

$$(A): \quad f(x_1 - 1, x_2) + f(x_1, x_2 - 1) + f(x_1 + 1, x_2) + f(x_1, x_2 + 1) = E f(x_1, x_2). \quad (179)$$

- $x_1 = 1, 3 \leq x_2 \leq N - 1$ のとき (水色) は,

$$(B): \quad f(1, x_2 - 1) + f(2, x_2) + f(1, x_2 + 1) = E f(1, x_2). \quad (180)$$

- $2 \leq x_1 \leq N - 2, x_2 = N$ のとき (橙色) は,

$$(C): \quad f(x_1 - 1, N) + f(x_1, N - 1) + f(x_1 + 1, N) = E f(x_1, N). \quad (181)$$

- $x_1 = x, x_2 = x + 1, 2 \leq x \leq N - 2$ のとき (緑色) は,

$$(D): \quad f(x-1, x+1) + f(x, x+2) + 2f(x, x+1) = Ef(x, x+1). \quad (182)$$

- $x_1 = 1, x_2 = 2$ のとき (青色) は,

$$(E): \quad f(1, 3) + 2f(1, 2) = Ef(1, 2). \quad (183)$$

- $x_1 = N - 1, x_2 = N$ のとき (赤色) は,

$$(F): \quad f(N-2, N) + 2f(N-1, N) = Ef(N-1, N). \quad (184)$$

- $x_1 = 1, x_2 = N$ のとき (桃色) は,

$$(G): \quad 0 = Ef(1, N). \quad (185)$$

周期境界条件の場合と同様に, $f(x_1, x_2)$ の定義域 $1 \leq x_1 < x_2 \leq N$ を拡張して余分な自由度について境界条件を導入しておくを便利. $2N + 1$ 個の変数

$$f(0, x_2), \quad x_2 = 1, \dots, N + 1, \quad (186)$$

$$f(x_1, N + 1), \quad x_1 = 0, \dots, N, \quad (187)$$

を導入して以下の境界条件を課す.

$$(B.C.) \quad \begin{cases} f(0, x_2) = 0, & x_2 = 1, \dots, N + 1, \\ f(x_1, N + 1) = 0, & x_1 = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (188)$$

すると方程式(A,B,C)は

$$(Eq.1): \quad f(x_1 - 1, x_2) + f(x_1, x_2 - 1) + f(x_1 + 1, x_2) + f(x_1, x_2 + 1) = Ef(x_1, x_2), \quad |x_2 - x_1| > 1, \quad (189)$$

とまとめることができる. さらに(D,E,F,G)についても,

$$(Eq.2): \quad f(x-1, x+1) + f(x, x+2) + 2f(x, x+1) = Ef(x, x+1), \quad (x = 1, \dots, N-1), \quad (190)$$

と書き換えられる.

固有値方程式(Eq.1, Eq.2, G)を境界条件(B.C.)のもとで解きたい. (Eq.1)は8個の自由場解

$$e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2}, e^{ik_1 x_2} e^{ik_2 x_1}, e^{-ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2}, e^{-ik_1 x_2} e^{ik_2 x_1}, \quad (191)$$

$$e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2 x_2}, e^{ik_1 x_2} e^{-ik_2 x_1}, e^{-ik_1 x_1} e^{-ik_2 x_2}, e^{-ik_1 x_2} e^{-ik_2 x_1}, \quad (192)$$

$$E_{\mathbf{k}} = 2 \cos k_1 + 2 \cos k_2 \quad (193)$$

を持つ. そこで解を

$$g_{\mathbf{k}}(x_1, x_2) = c_1^{++} e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} + c_2^{++} e^{ik_1 x_2} e^{ik_2 x_1} + c_1^{-+} e^{-ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} + c_2^{-+} e^{-ik_1 x_2} e^{ik_2 x_1} \quad (194)$$

$$+ c_1^{+-} e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2 x_2} + c_2^{+-} e^{ik_1 x_2} e^{-ik_2 x_1} + c_1^{--} e^{-ik_1 x_1} e^{-ik_2 x_2} + c_2^{--} e^{-ik_1 x_2} e^{-ik_2 x_1} \quad (195)$$

と置く. $g_{\mathbf{k}}(x_1, x_2)$ はやはり関係式

$$g_{\mathbf{k}}(x-1, x+1) + g_{\mathbf{k}}(x, x) + g_{\mathbf{k}}(x+1, x+1) + g_{\mathbf{k}}(x, x+2) = E_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(x, x+1) \quad (196)$$

を満たすので, $g_{\mathbf{k}}(x)$ を(Eq.2)に代入すると $g_{\mathbf{k}}(x_1, x_2)$ が解である条件は

$$g_{\mathbf{k}}(x, x) + g_{\mathbf{k}}(x+1, x+1) - 2g_{\mathbf{k}}(x, x+1) = 0 \quad (197)$$

となる。これは解が存在し, $c_1^{\sigma\sigma'}, c_2^{\sigma\sigma'}$ について方程式

$$\frac{c_1^{\sigma\sigma'}}{c_2^{\sigma\sigma'}} = -\frac{1 + e^{i(\sigma k_1 + \sigma' k_2)} - 2e^{i\sigma k_1}}{1 + e^{i(\sigma k_1 + \sigma' k_2)} - 2e^{i\sigma' k_2}} =: e^{i\varphi_{\sigma\sigma'}}, \quad \sigma, \sigma' \in \{+, -\}, \quad (198)$$

を得る。(方程式は線形なので各 $(\pm k_1, \pm k_2)$ の解の線形結合を取っている。) $e^{i\varphi_{--}} = e^{-i\varphi_{++}}, e^{i\varphi_{+-}} = e^{-i\varphi_{-+}}$ に注意すると, (Eq.1, Eq.2)を満たす仮設解は, a, b, c, d を係数として,

$$g_{\mathbf{k}}(x_1, x_2) = a(e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \frac{\alpha}{2})} + e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1 - \frac{\alpha}{2})}) + b(e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \frac{\alpha}{2})} + e^{-i(k_1 x_2 + k_2 x_1 - \frac{\alpha}{2})}) \quad (199)$$

$$+ c(e^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2 + \frac{\beta}{2})} + e^{i(k_1 x_2 - k_2 x_1 - \frac{\beta}{2})}) + d(e^{-i(k_1 x_1 - k_2 x_2 + \frac{\beta}{2})} + e^{-i(k_1 x_2 - k_2 x_1 - \frac{\beta}{2})}) \quad (200)$$

と与えられる。ここで,

$$e^{i\alpha} = -\frac{1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_1}}{1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_2}}, \quad (201)$$

$$e^{i\beta} = -\frac{1 + e^{i(k_1 - k_2)} - 2e^{ik_1}}{1 + e^{i(k_1 - k_2)} - 2e^{-ik_2}} = -\frac{e^{ik_1} + e^{ik_2} - 2e^{i(k_1 + k_2)}}{e^{ik_1} + e^{ik_2} - 2} \quad (202)$$

と置いた。

次に境界条件(B.C.)を解く。 $f(0, x_2) = 0$ より,

$$a(e^{i(k_2 x_2 + \frac{\alpha}{2})} + e^{i(k_1 x_2 - \frac{\alpha}{2})}) + b(e^{-i(k_2 x_2 + \frac{\alpha}{2})} + e^{-i(k_1 x_2 - \frac{\alpha}{2})}) \quad (203)$$

$$+ c(e^{i(-k_2 x_2 + \frac{\beta}{2})} + e^{i(k_1 x_2 - \frac{\beta}{2})}) + d(e^{-i(-k_2 x_2 + \frac{\beta}{2})} + e^{-i(k_1 x_2 - \frac{\beta}{2})}) \quad (204)$$

$$= (ae^{-i\alpha/2} + ce^{-i\beta/2})e^{ik_1 x_2} + (be^{i\alpha/2} + de^{i\beta/2})e^{-ik_1 x_2} \quad (205)$$

$$+ (ae^{i\alpha/2} + de^{-i\beta/2})e^{ik_2 x_2} + (be^{-i\alpha/2} + ce^{i\beta/2})e^{-ik_2 x_2}. \quad (206)$$

よって, $k_1 \neq k_2$ を仮定すると,

$$\begin{cases} ae^{-i\alpha/2} + ce^{-i\beta/2} = 0, \\ be^{i\alpha/2} + de^{i\beta/2} = 0, \\ ae^{i\alpha/2} + de^{-i\beta/2} = 0, \\ be^{-i\alpha/2} + ce^{i\beta/2} = 0, \end{cases} \quad (207)$$

を得る。解くと

$$b = ae^{i\beta}, \quad c = -ae^{-i(\alpha-\beta)/2}, \quad d = -ae^{i(\alpha+\beta)/2} \quad (208)$$

となる。よって仮設解は

$$g_{\mathbf{k}}(x_1, x_2) = (e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \frac{\alpha}{2})} + e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1 - \frac{\alpha}{2})})e^{-i\beta/2} + (e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \frac{\alpha}{2})} + e^{-i(k_1 x_2 + k_2 x_1 - \frac{\alpha}{2})})e^{i\beta/2} \quad (209)$$

$$- (e^{i(k_1 x_1 - k_2 x_2 + \frac{\beta}{2})} + e^{i(k_1 x_2 - k_2 x_1 - \frac{\beta}{2})})e^{-i\alpha/2} - (e^{-i(k_1 x_1 - k_2 x_2 + \frac{\beta}{2})} + e^{-i(k_1 x_2 - k_2 x_1 - \frac{\beta}{2})})e^{i\alpha/2}. \quad (210)$$

まで決まる。境界条件 $f(x_1, N+1) = 0$ が任意の x_1 に対して成立する条件から k_1, k_2 に関する方程式が

得られる. $L = N + 1$ と置くと,

$$f(x_1, L) = (e^{i(k_1 x_1 + k_2 L + \frac{\alpha}{2})} + e^{i(k_1 L + k_2 x_1 - \frac{\alpha}{2})})e^{-i\beta/2} + (e^{-i(k_1 x_1 + k_2 L + \frac{\alpha}{2})} + e^{-i(k_1 L + k_2 x_1 - \frac{\alpha}{2})})e^{i\beta/2} \quad (211)$$

$$- (e^{i(k_1 x_1 - k_2 L + \frac{\beta}{2})} + e^{i(k_1 L - k_2 x_1 - \frac{\beta}{2})})e^{-i\alpha/2} - (e^{-i(k_1 x_1 - k_2 L + \frac{\beta}{2})} + e^{-i(k_1 L - k_2 x_1 - \frac{\beta}{2})})e^{i\alpha/2} \quad (212)$$

$$= (e^{i(k_2 L + \frac{\alpha}{2})}e^{-i\beta/2} - e^{i(-k_2 L + \frac{\beta}{2})}e^{-i\alpha/2})e^{ik_1 x_1} + (e^{-i(k_2 L + \frac{\alpha}{2})}e^{i\beta/2} - e^{-i(-k_2 L + \frac{\beta}{2})}e^{i\alpha/2})e^{-ik_1 x_1} \quad (213)$$

$$+ (e^{i(k_1 L - \frac{\alpha}{2})}e^{-i\beta/2} - e^{-i(k_1 L - \frac{\beta}{2})}e^{i\alpha/2})e^{ik_2 x_1} + (e^{-i(k_1 L - \frac{\alpha}{2})}e^{i\beta/2} - e^{i(k_1 L - \frac{\beta}{2})}e^{-i\alpha/2})e^{-ik_2 x_1} \quad (214)$$

$$= 2i \sin(k_2 L + \frac{\alpha - \beta}{2})e^{ik_1 x_1} - 2i \sin(k_2 L + \frac{\alpha - \beta}{2})e^{-ik_1 x_1} \quad (215)$$

$$+ 2i \sin(k_1 L - \frac{\alpha + \beta}{2})e^{ik_2 x_1} - 2i \sin(k_1 L - \frac{\alpha + \beta}{2})e^{-ik_2 x_1} \quad (216)$$

$$= -4 \sin(k_2 L + \frac{\alpha - \beta}{2}) \sin(k_1 x_1) - 4 \sin(k_1 L - \frac{\alpha + \beta}{2}) \sin(k_2 x_1). \quad (217)$$

よって, $k_1 \neq k_2$ を仮定すると, 境界条件

$$\sin(k_2 L + \frac{\alpha - \beta}{2}) = \sin(k_1 L - \frac{\alpha + \beta}{2}) = 0, \quad (218)$$

あるいは,

$$e^{2ik_2(N+1)} = e^{-i\alpha}e^{i\beta} = \frac{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_2}}{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_1}} \times \frac{e^{ik_1} + e^{ik_2} - 2e^{i(k_1+k_2)}}{e^{ik_1} + e^{ik_2} - 2}, \quad (219)$$

$$e^{2ik_1(N+1)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = \frac{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_1}}{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_2}} \times \frac{e^{ik_1} + e^{ik_2} - 2e^{i(k_1+k_2)}}{e^{ik_1} + e^{ik_2} - 2} \quad (220)$$

を得る. これが開放端条件におけるBethe方程式に対応する. **既存の結果と比較**

References

- [1] H. A. Bethe, *Zeitschrift für Physik* **71**(1931)205.
- [2] 出口哲生, 「1次元量子系の厳密解とベーテ仮説の数理解物理」, 物性研究, 2000, 74(3): 255-319
- [3] Michael Karbach, Gerhard Muller, *Introduction to the Bethe ansatz I*, arXiv:cond-mat/9809162.
- [4] 南和彦, 「格子模型の数理解物理」, サイエンス社, 2014年.
- [5] Rafael I. Nepomechie, Chunguang Wang, *Algebraic Bethe ansatz for singular solutions*, arXiv:1304.7978.
- [6] F. H. L. Essler, V. E. Korepin and K. Schoutens, *J. Phys. A: Math. Gen.* 25 4115 (1992).
- [7] Vladimirov, Artem Alekseevich. *Proof of the invariance of the Behte-Ansatz solutions under complex conjugation*, *J. Math. Phys.*(Cambridge, Mass.);(United States) 66.1 (1986).