Chern-Simons 3 formについての計算メモ

塩崎　謙

January 14, 2024

Chern-Simons (CS) 3形式

$$\frac{1}{2!}(\frac{i}{2\pi})^2 \mathrm{tr}\,[AdA+\frac{2}{3}A^3] = -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\,[AdA+\frac{2}{3}A^3] \tag{1}$$

はゲージ不変ではない．パッチU_iにおけるゲージ場をA_iと書く．ゲージ変換は

$$A_j = v_{ij}^{-1}(A_i+d)v_{ij}, \quad v_{ij}\in U(N). \tag{2}$$

このゲージ変換でCS 3形式の変化分を計算すると，

$$v^{-1}(A+d)v = v^{-1}(A+dvv^{-1})v \tag{3}$$

より，

$$\begin{aligned}
&\delta \mathrm{tr}\,[AdA+\frac{2}{3}A^3] && (4)\\
&= \mathrm{tr}\,[v^{-1}(A+dvv^{-1})vd(v^{-1}(A+dvv^{-1})v)+\frac{2}{3}(v^{-1}(A+dvv^{-1})v)^3] - \mathrm{tr}\,[AdA+\frac{2}{3}A^3] && (5)\\
&= \mathrm{tr}\,[v^{-1}(A+dvv^{-1})v\{dv^{-1}Av+v^{-1}dAv-v^{-1}Adv+dv^{-1}dv)+\frac{2}{3}(A+dvv^{-1})^3] - \mathrm{tr}\,[AdA+\frac{2}{3}A^3] && (6)\\
&= \mathrm{tr}\,[v^{-1}(A+dvv^{-1})v\{-v^{-1}dvv^{-1}Av+v^{-1}dAv-v^{-1}Advv^{-1}v-v^{-1}dvv^{-1}dvv^{-1}v) && (7)\\
&+\frac{2}{3}(A+dvv^{-1})^3] - \mathrm{tr}\,[AdA+\frac{2}{3}A^3] && (8)\\
&= \mathrm{tr}\,[(A+dvv^{-1})(-dvv^{-1}A+dA-Advv^{-1}-dvv^{-1}dvv^{-1})+\frac{2}{3}(A+dvv^{-1})^3] - \mathrm{tr}\,[AdA+\frac{2}{3}A^3]. && (9)
\end{aligned}$$

$X=dvv^{-1}$と書くと，

$$\begin{aligned}
&\delta \mathrm{tr}\,[AdA+\frac{2}{3}A^3] && (10)\\
&= \mathrm{tr}\,[(A+X)(-XA+dA-AX-X^2)+\frac{2}{3}(A+X)^3] - \mathrm{tr}\,[AdA+\frac{2}{3}A^3] && (11)\\
&= \mathrm{tr}\,\Big[-AXA+AdA-A^2X-AX^2-X^2A+XdA-XAX-X^3 && (12)\\
&+\frac{2}{3}(A^3+A^2X+AXA+AX^2+XA^2+XAX+X^2A+X^3)\Big] - \mathrm{tr}\,[AdA+\frac{2}{3}A^3] && (13)\\
&= \mathrm{tr}\,\Big[-A^2X+AdA-A^2X-AX^2-AX^2+XdA-AX^2-X^3 && (14)\\
&+\frac{2}{3}(A^3+A^2X+A^2X+AX^2+A^2X+AX^2+AX^2+X^3)\Big] - \mathrm{tr}\,[AdA+\frac{2}{3}A^3] && (15)\\
&= \mathrm{tr}\,[XdA-AX^2-\frac{1}{3}X^3]. && (16)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}\,[XYZ] = \mathrm{tr}\,[X_\mu Y_\nu Z_\rho]\epsilon_{\mu\nu\rho} = \mathrm{tr}\,[Y_\nu Z_\rho X_\mu]\epsilon_{\mu\nu\rho} = \mathrm{tr}\,[Y_\mu Z_\nu X_\rho]\epsilon_{\rho\mu\nu} = \mathrm{tr}\,[Y_\mu Z_\nu X_\rho]\epsilon_{\mu\nu\rho} = \mathrm{tr}\,[YZX] \tag{17}$$

に注意．ここで，

$$X^2 = dvv^{-1}dvv^{-1} = -dvdv^{-1} = d(dvv^{-1}) = dX \tag{18}$$

に注意すると，

$$\mathrm{tr}\,[XdA - AdX] = \mathrm{tr}\,[XdA - dXA] = -d\mathrm{tr}\,[XA], \tag{19}$$

（$\mathrm{tr}\,[XdA - dXA] = \mathrm{tr}\,[dAX - AdX] = d\mathrm{tr}\,[AX] = -d\mathrm{tr}\,[XA]$に注意．）であるから，

$$\delta\mathrm{tr}\,[AdA + \frac{2}{3}A^3] = -d\mathrm{tr}\,[dvv^{-1}A] - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,[dvv^{-1}]^3 \tag{20}$$

となる．第 1 項は全微分項．第 2 項は$U(N)$への写像度を計算する体積要素である．

1 $SU(2)$の場合