Čech=de Rham複体

塩崎　謙

August 3, 2022

Abstract

Bott=Tuの8章に従って，Čech=de Rham複体についてまとめる．[1]

Mを向き付けのある多様体とし，good coverとは限らない$\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_\alpha$を開被覆とする．

$$U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}=U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p} \tag{1}$$

と略す． $\Omega^*=\Omega^*(M)$と略す． Čech=de Rham複体とは，

$$C^*(\mathcal{U},\Omega^*)=\bigoplus_{p,q\geq 0}K^{p,q}=\bigoplus_{p,q\geq 0}C^p(\mathcal{U},\Omega^q) \tag{2}$$

のこと． q形式pコチェイン$\omega\in C^p(\mathcal{U},\Omega^q)$は

$$\omega=\{\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\in\Omega^q(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p})|\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\text{is skew symmetric for }\alpha_0,\dots,\alpha_p\}_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \tag{3}$$

なる集合である．外微分

$$d:K^{p,q}\to K^{p,q+1} \tag{4}$$

は通常通り定義される．コチェインの微分

$$\delta:K^{p,q}\to K^{p+1,q} \tag{5}$$

を

$$(\delta\omega)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}}=\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\omega_{\alpha_0\cdots\check{\alpha}_j\cdots\alpha_{p+1}} \tag{6}$$

と定義する．ただし，$\check{\alpha}_j$はα_jを飛ばす，という意味である． $\delta^2=0$が成立する．

- δ-cohomologyは消える．

(証明) ρ_αを1の分割とする．つまり，

$$\sum_\alpha\rho_\alpha=1,\quad \rho_\alpha\geq 0 \tag{7}$$

である． $\omega\in K^{p,q}$に対して，$K\omega\in K^{p-1,q}$を

$$(K\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_p}=\sum_\alpha\rho_\alpha\omega_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_p} \tag{8}$$

[1] Bott=Tuは，Dコバウンダリの定義が曖昧で，また，Proposition 8.8のr^*の単射性の証明が間違っていると思う．

と定義する．すると，

$$(\delta K\omega)_{\alpha_0\cdots\alpha_p} = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j (K\omega)_{\alpha_0\cdots\check{\alpha}_j\cdots\alpha_p} \tag{9}$$

$$= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j (K\omega)_{\alpha_0\cdots\check{\alpha}_j\cdots\alpha_p} \tag{10}$$

$$= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j \sum_{\alpha} \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0\cdots\check{\alpha}_j\cdots\alpha_p}. \tag{11}$$

一方で，

$$(K\delta\omega)_{\alpha_0\cdots\alpha_p} = \sum_{\alpha} \rho_\alpha (\delta\omega)_{\alpha\alpha_0\cdots\alpha_p} \tag{12}$$

$$= \sum_{\alpha} \rho_\alpha (\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p} + \sum_{j=0}^{p}(-1)^{j+1}\omega_{\alpha\alpha_0\cdots\check{\alpha}_j\cdots\alpha_p}) \tag{13}$$

$$= \omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p} + \sum_{\alpha} \rho_\alpha \sum_{j=0}^{p}(-1)^{j+1}\omega_{\alpha\alpha_0\cdots\check{\alpha}_j\cdots\alpha_p}. \tag{14}$$

よって，

$$\delta K + K\delta = 1 \tag{15}$$

が成立する．（Kはホモトピー演算子と呼ばれる．）よって，$\delta\omega = 0$のとき，

$$\omega = \delta K\omega \tag{16}$$

であり，δ-exact. □

２重複体$K^{p,q}$に対して微分Dを

$$D = D' + D'' = \delta + (-1)^p d \quad \text{on } K^{p,q} \tag{17}$$

と定義する． $D' = \delta$はpの次数を1変えるから， $D'D'' = -D''D'$に注意．よって， $D^2 = 0$が成立．Dコサイクル，Dコバウンダリ，Dコホモロジーを通常通り定義する．つまり，

$$Z_D^n = \mathrm{Ker}\,[D : \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q} \to \bigoplus_{p+q=n+1} K^{p,q}], \tag{18}$$

$$B_D^n = \mathrm{Im}\,[D : \bigoplus_{p+q=n-1} K^{p,q} \to \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}], \tag{19}$$

$$H_D^*\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\} = \bigoplus_{n\geq 0} Z_D^n / B_D^n. \tag{20}$$

例えば，2コサイクルは以下のデータ．

$$\omega = a + b + c, \quad a \in K^{0,2}, \quad b \in K^{1,1}, \quad c \in K^{2,0}, \tag{21}$$

$$da = 0, \tag{22}$$

$$\delta a - db = 0, \tag{23}$$

$$\delta b + dc = 0, \tag{24}$$

$$\delta c = 0. \tag{25}$$

例えば，4コバウンダリは以下のデータ [2]

$$
\begin{aligned}
&\omega = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4, \quad b_j \in K^{j,4-j}, && (26)\\
&b_0 = da_0, && (27)\\
&b_1 = \delta a_0 - da_1, && (28)\\
&b_2 = \delta a_1 + da_2, && (29)\\
&b_3 = \delta a_2 - da_3, && (30)\\
&b_4 = \delta a_4, && (31)\\
&a_j \in K^{j,3-j}. && (32)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{H^*_{\mathrm{dR}}(M) \cong H_D\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\}. \quad (33)}
$$

（証明）制限

$$
\begin{aligned}
&r : \Omega^*(M) \to C^0(\mathcal{U}, \Omega^*), && (34)\\
&\omega \mapsto (r\omega)_\alpha := \omega \quad \text{on } U_\alpha && (35)
\end{aligned}
$$

を定義する．まず，rは$H_D\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\}$にマップを誘導する，つまり，$\omega$が$d$完全形式であれば$r\omega$は$D$完全形式であることを示す． $\omega = d\eta$とする．

$$
(\delta r\omega)_{\alpha\beta} = (r\omega)_\beta - (r\omega)_\alpha = 0 \text{ on } U_{\alpha\beta} \quad (36)
$$

より，

$$
\delta r = 0 \quad (37)
$$

に注意する．また，

$$
\begin{aligned}
&(rd\omega)_\alpha = d\omega \text{ on } U_\alpha, && (38)\\
&(dr\omega)_\alpha = d(r\omega)_\alpha = d(\omega \text{ on } U_\alpha) = d\omega \text{ on } U_\alpha && (39)
\end{aligned}
$$

より，$rd = dr$. よって，$\omega = d\eta$のとき，$Dr\omega = (\delta + d)r\omega = rd\omega = 0$より．よって，制限$r$は

$$
r^* : H^*_{\mathrm{dR}}(M) \to H_D\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\} \quad (40)
$$

を誘導する．これが同相写像であることを示す．

r^*が全射であることを示す． $D\omega = 0$とする．例として，ωは2コサイクルとする．つまり，

$$
\begin{aligned}
&\omega = a + b + c, \quad a \in K^{0,2}, \quad b \in K^{1,1}, \quad c \in K^{2,0}, && (41)\\
&da = 0, && (42)\\
&\delta a - db = 0, && (43)\\
&\delta b + dc = 0, && (44)\\
&\delta c = 0. && (45)
\end{aligned}
$$

$\delta c = 0$より，$c = \delta X$なる$X \in K^{1,0}$が存在．すると，

$$
\omega = a + b + \delta X = a + (b + dX) + DX, \quad b + dX \in K^{1,1}. \quad (46)
$$

$a + (b + dX)$もDコサイクルであるから， $\delta(b + dX) = 0$である．実際，

$$
\delta(b + dX) = \delta b + \delta dX = \delta b + dc = 0. \quad (47)
$$

[2] Bott=Tuの96ページの図を見ると，$da_0 = 0, \delta a_4 = 0$も定義に含まれているように見えるが，その必要はないだろう．

よって，$Y \in K^{0,1}$が存在して，

$$b + dX = \delta Y. \tag{48}$$

よって，

$$\omega = a + \delta Y + DX = (a - dY) + DY + DX, \quad a - dY \in K^{2,0}. \tag{49}$$

$a - dY$もDコサイクルであるから，$\delta(a - dY) = 0$である．実際，

$$\delta(a - dY) = \delta a - d(b + dX) = \delta a - db = 0. \tag{50}$$

よって，$a - dY$は大域的2形式．また，

$$d(a - dY) = 0 \tag{51}$$

であるので，$a - dY$はd閉形式．よって，$r^*([a - dY]_d) = [\omega]_D$である．一般の$p$形式でも同様.

次に，r^*が単射であることを示す． $\omega = d\eta$をd完全形式とする． $r^*([\omega]_d) = 0$，つまり$r\omega$がD完全形式であることを示せば良いが，既に示したように，$rd = dr = Dr$であるので，$[r\omega]_D = [rd\eta]_D = [Dr\eta]_D = 0.$ □