# クラスDとフェルミオン量子多体系における対称性

塩崎　謙

February 3, 2022

自由フェルミオン系におけるクラスDの対称性

$$U_C\mathcal{H}^*U_C^{-1}=-\mathcal{H},\quad U_CU_C^*=1 \tag{1}$$

には，量子多体系における対称性として2通りの対応物がある．これは，$H$を用いて導入した自由フェルミオンのハミルトニアン

$$H=\sum_{ij}\psi_i^\dagger\mathcal{H}_{ij}\psi_j \tag{2}$$

において，複素フェルミオン$\psi_i^\dagger$が常にフェルミオンの$U(1)^f$対称性

$$e^{i\theta N}\psi_i^\dagger e^{-i\theta N}=e^{i\theta}\psi_i^\dagger \tag{3}$$

を持つことに由来する．

## 1　$(-1)^F$対称性

一般に，自由フェルミオンのハミルトニアンは，$\{a_i\}_{i=1,\dots N}$をマヨラナフェルミオン，$\mathcal{A}$を反対称行列として，

$$H=\sum_{ij}\frac{i}{2}\mathcal{A}_{ij}a_ia_j \tag{4}$$

と書くことができる．フェルミオンパリティの対称性

$$(-1)^Fa_i(-1)^F=-a_i \tag{5}$$

を持つ．複素フェルミオン$\{c_i\}_{i=1,\dots,N}$を

$$c_i=a_{2i-1}+ia_{2i} \tag{6}$$

によって導入すると，（以下はフェルミオンパリティ対称性のみを持つ一般的なハミルトニアンであるので）

$$H=\sum_{ij}c_i^\dagger h_{ij}c_j+\frac{1}{2}\sum_{ij}(\Delta_{ij}c_i^\dagger c_j^\dagger+h.c.) \tag{7}$$

$$\sim\frac{1}{2}\sum_{ij}\psi_i^\dagger\begin{pmatrix}h & \Delta\\ \Delta^\dagger & -h^T\end{pmatrix}_\tau\psi_j \tag{8}$$

と書くこともできる．定数項を無視した．また，南部表示

$$\psi_i=(c_i,c_i^\dagger)_\tau \tag{9}$$

を導入した． BdGハミルトニアン

$$\mathcal{H}_{\mathrm{BdG}} = \begin{pmatrix} h & \Delta \\ \Delta^\dagger & -h^T \end{pmatrix}_\tau \tag{10}$$

は，表示より，以下のPHSを持つ．

$$U_C \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}^* U_C^{-1} = -\mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}, \quad U_C = \tau_x K. \tag{11}$$

PHSは，南部フェルミオンの内部自由度の冗長性に基づく．つまり，$\psi_i$は2成分スピノル表示したが，自由度の数としては1成分．以上より，クラスDの解釈として，$(-1)^F$対称性を得た．

### 1.1 0次元アノマリー

空間0次元のアノマリーは$\mathbb{Z}_2$で分類され，単一のマヨラナフェルミオンによって生成される． $\mathbb{Z}_2$分類の解釈は，マヨラナフェルミオンが$a_1, a_2$の2個存在する場合は単一の状態を構成できるからである．実際，複素フェルミオンを

$$c = a_1 + ia_2 \tag{12}$$

によって導入すると，ハミルトニアン

$$H = +c^\dagger c \tag{13}$$

の基底状態は$c$の真空$|0\rangle$である．

## 2 $U(1)^f \rtimes \mathbb{Z}_2^C$対称性

複素フェルミオン$c_i$に対して，$U(1)^f$対称性

$$e^{i\theta N} c_i^\dagger e^{-i\theta N} = e^{i\theta} c_i^\dagger \tag{14}$$

を持った一般的な自由フェルミオンハミルトニアンは

$$H = \sum_{ij} c_i^\dagger \mathcal{H}_{ij} c_j \tag{15}$$

と書かれる．さらに，本来の意味のPHSを課す． $|0\rangle$を複素フェルミオン$c_i$の真空とし，

$$C\psi_i C^{-1} = \psi_j^\dagger [U_C]_{ji}, \quad U_C U_C^* = 1, \quad CiC^{-1} = i, \quad C\,|0\rangle = |\mathrm{Full}\rangle \tag{16}$$

と$C$を定義する．（真空への$C$作用の位相は$U(1)^f$変換を用いて1に取ることができる．） $C$はユニタリな対称性であることに注意． $C$対称性を$H$に課す，つまり，

$$CHC^{-1} = H \tag{17}$$

とすると，自由フェルミオンの範囲内では，$\mathcal{H}$のエルミート性に注意すると，

$$U_C \mathcal{H}^* U_C^{-1} = -\mathcal{H} \tag{18}$$

と等価．

## 2.1　0次元アノマリー

アノマリーの分類は$\mathbb{Z}_2$であり，単一の複素フェルミオンによって生成される．単一のフェルミオンによって構成されるヒルベルト空間において，$U(1)^f$と$\mathbb{Z}_2^C$対称性を同時に満たす単一状態を構成することはできない．実際，$c^\dagger|0\rangle, |0\rangle$の線形結合は$U(1)$対称性より禁止されるが，

$$Cc^\dagger|0\rangle = |0\rangle, \quad C|0\rangle = c^\dagger|0\rangle \tag{19}$$

であるので，$C$対称性より状態は2重縮退する．

$\mathbb{Z}_2$分類も確認できる． $c_1, c_2$を電荷1の複素フェルミオン，つまり，$U(1)^f$電荷を$N = c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2$とし， PHSを

$$Cc_iC^{-1} = c_j^\dagger[U_C]_{ji}, \quad U_C^T = U_C, \quad C|0\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger|0\rangle \tag{20}$$

とする．任意の複素対称行列$A$がユニタリ行列$Q$を用いて$A = Q\Lambda Q^T$と固有分解されることを思い出すと，$V = (v_1, v_2)$をユニタリ行列として，

$$U_C = V^\dagger V^* \tag{21}$$

と表示できる． $U(1)^f$対称性と半交換関係を保つ複素フェルミオンの基底変換

$$c_i^\dagger = c_j'^\dagger V_{ji} \tag{22}$$

を導入すると，PHSは

$$Cc_j'C^{-1} = c_j'^\dagger, \quad C|0\rangle = \det(V)c_1'^\dagger c_2'^\dagger|0\rangle \tag{23}$$

と書かれる．

$$Cc_1'^\dagger|0\rangle = c_1' \det(V)c_1'^\dagger c_2'^\dagger|0\rangle = \det(V)c_2'^\dagger|0\rangle \tag{24}$$

$$Cc_2'^\dagger|0\rangle = c_2' \det(V)c_1'^\dagger c_2'^\dagger|0\rangle = -\det(V)c_1'^\dagger|0\rangle \tag{25}$$

に注意する．つまり， 1粒子状態の基底を$c_1'^\dagger|0\rangle, c_2'^\dagger|0\rangle$と取ると，PHSは

$$C(c_1'^\dagger|0\rangle, c_2'^\dagger|0\rangle) = (c_1'^\dagger|0\rangle, c_2'^\dagger|0\rangle)\begin{pmatrix} 0 & -\det(V) \\ \det(V) & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

と表示できる．よって，状態

$$(c_1'^\dagger \pm ic_2'^\dagger)|0\rangle \tag{27}$$

は$U(1)^f \times \mathbb{Z}_2^C$対称性を満たす．

$$C(c_1'^\dagger \pm ic_2'^\dagger)|0\rangle = \pm i\det(V)(c_1'^\dagger \pm ic_2'^\dagger)|0\rangle. \tag{28}$$

## 2.2　コメント

フェルミオンパリティ対称性と，$U(1)^f \rtimes \mathbb{Z}_2^C$対称性は異なる対称性であるので可逆相の分類が一致しなくてもよい．コボルディズム群の計算により時空3次元において分類が異なることが知られている．[1]を見よ．

# References

[1] Luuk Stehouwer, *Interacting SPT phases are not Morita invariant*, arXiv:2110.07408.