Chen-Gu-Liu-Wenのコサイクル模型に関するノート

塩崎　謙

September 13, 2021

Abstract

Chen-Gu-Liu-Wen[1]の模型について，基底状態，及び局所ユニタリ変換の構成と，それらの境界のある系における性質と，境界状態への対称性変換についてまとめる．

1　球面上の基底状態

$(d+1)$コサイクル$\nu \in Z^{d+1}(G, U(1))$をひとつ与えると，時空$(d+1)$次元におけるSPT相をひとつ与える分配関数が

$$Z = \frac{1}{|G|^{N_v}} \sum_{\{g_x\}} \prod_{\Delta^{d+1}} \nu(g_0, g_1, \dots, g_d)^{\mathrm{sign}(\Delta^{d+1})} \tag{1}$$

で与えられる．ここでN_vは時空の頂点の数である． $\mathrm{sign}(\Delta^p)$はp単体 Δ^pの向きに対して符号± 1を与える．球面S^d上の基底状態は，球面内部の点（これは1点に取ることができる）を経路積分することにより，

$$|\nu\rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g_*} \frac{1}{|G|^{N_v}} \sum_{\{g_x\}} \prod_{\Delta} \nu(g_*, g_1, \dots, g_d)^{\mathrm{sign}(\Delta^d)} |\{g_x\}\rangle \tag{2}$$

となる． N_vは空間S^dの頂点の数である．局所基底$|g_x\rangle$に対してGは$\hat{g}\,|h_x\rangle = |gh_x\rangle$と作用する．状態$|\nu\rangle$の$G$対称性を確認すると，

$$\begin{aligned}
\hat{g}\,|\nu\rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g_*} \frac{1}{|G|^{N_v}} \sum_{\{g_x\}} \prod_{\Delta} \nu(g_*, g_1, \dots, g_d)^{\mathrm{sign}(\Delta)} |\{gg_x\}\rangle & (3)\\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g_*} \frac{1}{|G|^{N_v}} \sum_{\{g_x\}} \prod_{\Delta} \nu(g_*, g^{-1}g_1, \dots, g^{-1}g_d)^{\mathrm{sign}(\Delta)} |\{g_x\}\rangle & (4)\\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g_*} \frac{1}{|G|^{N_v}} \sum_{\{g_x\}} \prod_{\Delta} \nu(g^{-1}g_*, g^{-1}g_1, \dots, g^{-1}g_d)^{\mathrm{sign}(\Delta)} |\{g_x\}\rangle & (5)
\end{aligned}$$

となるが，コチェインの一様条件

$$\nu(gg_0, gg_1, \dots, gg_d) = \nu(g_0, g_1, \dots, g_d) \tag{6}$$

を用いると，

$$\hat{g}\,|\nu\rangle = |\nu\rangle \tag{7}$$

が確認できる． $|\nu\rangle$の表式において，球面内部の点の群元g_*に依存しない．実際，コサイクル条件

$$(d\nu)(g_0, \dots, g_{d+1}) = \nu(g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\nu(g_0, g_2, \dots, g_{d+1})^{-1} \cdots \nu(g_0, g_1, \dots, g_d)^{d+1} = 1 \tag{8}$$

を$(g_*, g'_*, g_1, \ldots, g_d)$に対して適用すると，

$$
\begin{aligned}
&\nu(g_*, g_1, \ldots, g_d)\nu(g'_*, g_1, \ldots, g_d)^{-1} && (9)\\
&= \nu(g_*, g'_*, g_2, g_3, \ldots, g_d)\nu(g_*, g'_*, g_1, g_2, \ldots, g_d)^{-1} \cdots \nu(g_*, g'_*, g_1, g_2, \ldots, g_{d-1})^{d-1} && (10)
\end{aligned}
$$

となる．右辺は隣接するd単体からの寄与とキャンセルする．よって，$g_* \in G$を任意の群元として，

$$
|\nu\rangle = \frac{1}{|G|^{N_v}} \sum_{\{g_x\}} \prod_{\Delta^d} \nu(g_*, g_1, \ldots, g_d)^{\mathrm{sign}(\Delta^d)} |\{g_x\}\rangle \tag{11}
$$

と書くことができる．同じことだが，

$$
|\mathrm{triv}\rangle = \bigotimes_x \frac{1}{|G|} \sum_{g_x \in G} |g_x\rangle \tag{12}
$$

に対して，ユニタリ変換

$$
U(\nu) = \sum_{\{g_x\}} \prod_{\Delta^d} \nu(g_*, g_1, \ldots, g_d)^{\mathrm{sign}(\Delta^d)} |\{g_x\}\rangle \langle\{g_x\}| \tag{13}
$$

を作用させることにより得られる．

$$
|\nu\rangle = U(\nu) |\mathrm{triv}\rangle . \tag{14}
$$

状態$|\nu\rangle$のG対称性は

$$
\hat{g} U(\nu) \hat{g}^{-1} = U(\nu) \tag{15}
$$

と言い換えられる．

$|\nu\rangle$を基底状態として持つハミルトニアンのひとつは以下のように与えられる．まず，$|\mathrm{triv}\rangle$を基底状態としてもつハミルトニアンのひとつは，

$$
H_{\mathrm{triv}} = -\sum_x P_x \tag{16}
$$

とし，P_xはサイトxにおける自明状態$|\phi_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g_x \in G} |g_x\rangle$への射影$P_x = |\phi_x\rangle \langle\phi_x|$である．$|\nu\rangle$を基底状態として持つハミルトニアンは

$$
H(\nu) = U(\nu) H_{\mathrm{triv}} U(\nu)^{-1} = -\sum_x U(\nu) P_x U(\nu)^{-1} \tag{17}
$$

で与えられる． $U(\nu) P_x U(\nu)^{-1}$はサイトxに隣接するサイトにのみサポートを持つことに注意.

1.1 例

ひとつだけ例を考える．空間1次元，$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$とする．非自明な群コサイクルは

$$
\omega(g, h) = (-1)^{[g]_1 [h]_2} \tag{18}
$$

で与えられる．ただし，$[g]_j$はj番目の成分． $g_* = e$と選ぶと

$$
\nu(e, g_j, g_{j+1}) = \omega(g_j, g_j^{-1} g_{j+1}) = (-1)^{[g_j]_1 [-g_j + g_{j+1}]_2}. \tag{19}
$$

jサイトにおけるPauli行列を$\tau^z |[g]_1 [g]_2\rangle = (-1)^{[g]_1} |[g]_1 [g]_2\rangle, \sigma^z |[g]_1 [g]_2\rangle = (-1)^{[g]_2} |[g]_1 [g]_2\rangle$によって導入すると

$$
U(\nu) = \sum_{\{g_j\}} \prod_j \nu(e, g_j, g_{j+1}) |\{g_j\}\rangle \langle\{g_j\}| = \prod_j (-1)^{\frac{1-\tau_j^z}{2}\left(\frac{1-\sigma_j^z}{2} - \frac{1-\sigma_{j+1}^z}{2}\right)} = \prod_j e^{\frac{\pi i}{4}(1-\tau_j^z)(-\sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z)} \tag{20}
$$

となる．自明なハミルトニアンは$\tau_j^x = \sigma_j^x = 1$への射影として与えることができ，定義通りであれば以下で与えられる．

$$H_0' = -\sum_j \frac{1+\tau_j^x}{2}\frac{1+\sigma_j^x}{2} \tag{21}$$

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$対称性演算子は

$$\prod_j \tau_j^x, \quad \prod_j \sigma_j^x. \tag{22}$$

同一基底状態を与えるだけであれば別のハミルトニアンでも良い．

$$H_0 = -\sum_j (\tau_j^x + \sigma_j^x). \tag{23}$$

以下ではこの表式を用いる．

$$U(\nu)\tau_j^x U(\nu)^{-1} = \sigma_j^z \tau_j^x \sigma_{j+1}^z, \tag{24}$$

$$U(\nu)\sigma_j^x U(\nu)^{-1} = \tau_{j-1}^z \sigma_j^x \tau_j^z. \tag{25}$$

に注意するとクラスターハミルトニアン

$$H(\nu) = -\sum_j \sigma_j^z \tau_j^x \sigma_{j+1}^z - \sum_j \tau_{j-1}^z \sigma_j^x \tau_j^z \tag{26}$$

を得る．

2　境界がある場合の局所ユニタリ変換$U(\nu)$の性質

一方で，境界のある系においては，境界において(11)右辺の寄与が残るため，

- $U(\nu)$はg_*の選び方に依存し，
- 同じことだが，$U(\nu)$はG不変でない．

計算を具体的にするため，空間$d=1$次元においてこの点を確認する．サイト$x=1,\dots,N$の有限系を考える．

ユニタリ変換$U_{\mathrm{open}}(\nu)$を単に，$U(\nu)$の表式においてサポートが有限系に残る部分のみを残すと，

$$U_{\mathrm{open}}(\nu) = \sum_{g_1,\dots,g_N} \prod_{x=1}^{N-1} \nu(g_*, g_x, g_{x+1}) \left|g_1,\dots,g_N\right\rangle \left\langle g_1,\dots,g_N\right| \tag{27}$$

となる．両端の寄与が残るため，$U_{\mathrm{open}}(\nu)$はG不変でない．実際，

$$\hat{g} U_{\mathrm{open}}(\nu) \hat{g}^{-1} = \sum_{g_1,\dots,g_N} \prod_{x=1}^{N-1} \nu(g_*, g_x, g_{x+1}) \left|gg_1,\dots,gg_N\right\rangle \left\langle gg_1,\dots,gg_N\right| \tag{28}$$

$$= \sum_{g_1,\dots,g_N} \prod_{x=1}^{N-1} \nu(g_*, g^{-1}g_x, g^{-1}g_{x+1}) \left|g_1,\dots,g_N\right\rangle \left\langle g_1,\dots,g_N\right| \tag{29}$$

$$= \sum_{g_1,\dots,g_N} \prod_{x=1}^{N-1} \nu(gg_*, g_x, g_{x+1}) \left|g_1,\dots,g_N\right\rangle \left\langle g_1,\dots,g_N\right| \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

と書ける．参照群元g_*の取り替え$g_* \mapsto gg_*$に相当する．

$$= \sum_{g_1,\dots,g_N} \prod_{x=1}^{N-1} \nu(g_*, g_x, g_{x+1})\nu(gg_*, g_*, g_x)\nu(gg_*, g_*, g_{x+1})^{-1} |g_1,\dots,g_N\rangle \langle g_1,\dots,g_N| \tag{32}$$

$$= \sum_{g_1,\dots,g_N} \nu(gg_*, g_*, g_1) \left[\prod_{x=1}^{N-1} \nu(g_*, g_x, g_{x+1})\right] \nu(gg_*, g_*, g_N)^{-1} |g_1,\dots,g_N\rangle \langle g_1,\dots,g_N| \tag{33}$$

$$= \sum_{g'_1, g'_N} \sum_{g_1,\dots,g_N} \nu(gg_*, g_*, g'_1) |g'_1\rangle \langle g'_1| \left[\prod_{x=1}^{N-1} \nu(g_*, g_x, g_{x+1})\right] |g_1,\dots,g_N\rangle \langle g_1,\dots,g_N| \, \nu(gg_*, g_*, g'_N)^{-1} |g'_N\rangle \langle g'_N| \tag{34}$$

$$= v_L U_{\mathrm{open}}(\nu) v_R^\dagger \tag{35}$$

となり，G不変性が境界で破れる．ここで，境界にのみサポートをもつユニタリー

$$v_{L/R} = \nu(gg_*, g_*, g_{1/N}) |g_{1/N}\rangle \langle g_{1/N}| \tag{36}$$

を導入した．（系の端に有限次元の自由度が出現し，$v_{L/R}$が射影表現として作用する，わけではない．）

例として，$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$の場合に$U_{\mathrm{open}}(\nu)$を自明なハミルトニアン$H_0$に作用させてみる．

$$U_{\mathrm{open}}(\nu) \tau_j^x U_{\mathrm{open}}(\nu)^{-1} = \begin{cases} \sigma_1^z \tau_1^x \sigma_2^z & (j = 1), \\ \sigma_j^z \tau_j^x \sigma_{j+1}^z & (2 \le j \le N-1), \\ \tau_N^x & (j = N), \end{cases} \tag{37}$$

$$U_{\mathrm{open}}(\nu) \sigma_j^x U_{\mathrm{open}}(\nu)^{-1} = \begin{cases} \sigma_1^x \tau_1^z & (j = 1), \\ \tau_{j-1}^z \sigma_j^x \tau_j^z & (2 \le j \le N-1), \\ \tau_{N-1}^z \sigma_N^x & (j = N). \end{cases} \tag{38}$$

より，

$$H_{\mathrm{open}}(\nu) = U_{\mathrm{open}}(\nu) H_0 U_{\mathrm{open}}(\nu)^{-1} = -\sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j^z \tau_j^x \sigma_{j+1}^z - \tau_N^x - \sigma_1^x \tau_1^z - \sum_{j=2}^{N-1} \tau_{j-1}^z \sigma_j^x \tau_j^z - \tau_{N-1}^z \sigma_N^x. \tag{39}$$

となり，$\mathbb{Z}_2$対称性が端で破れている．注意として，H_0とユニタリー同値なので，$H_{\mathrm{open}}(\nu)$の基底状態は単一でギャップがある．

3 境界状態に対する対称性作用

ハミルトニアンを

$$H = H_{\mathrm{bulk}} + H_{\mathrm{bdy}} \tag{40}$$

と分解する． $H_{\mathrm{bulk}} = -\sum_j B_j, B_j = U(\nu) P_j U(\nu)^{-1}$,は系内部の点における局所ハミルトニアンの和であり，H_{bdy}は対称性を満たす，境界における任意の局所ハミルトニアンの和． H_{bulk}を解くと，境界の自由度が残り，基底状態多様体は

$$\{|\Psi(\{g_n\})\rangle\}_{g_n \in G} \tag{41}$$

と書くことができる． g_nを境界自由度，g_jを系内部の自由度とする．基底状態$|\Psi(\{g_n\})\rangle$の相対位相は定まらない．基底状態の位相を，

$$|\Psi(\{g_n\})\rangle = \sum_{\{g_j\}} \prod_{\Delta} \nu(g_*, g_0, \dots, g_d)^{\mathrm{sgn}\,\Delta} |\{g_j\}, \{g_n\}\rangle \tag{42}$$

と決める．[1] 対称性変換$U(g\in G)$は基底状態多様体で閉じることが分かり，対称性変換の基底状態多様体における表示が機械的に計算できる． [2]のApp. Eに計算結果が示されているが，ここで導出を試みる．

3.1 空間1次元

まずは空間1次元で計算練習する．境界スピンg_1, g_Nで指定される基底状態波動関数は，

$$|\Psi(g_1,g_N)\rangle = \sum_{g_2,\ldots,g_{N-1}} \prod_{j=1}^{N-1} \nu(g_*,g_j,g_{j+1})\,|g_1,g_2,\ldots,g_{N-1},g_N\rangle\,. \tag{43}$$

対称性変換は

$$U(g)\,|\Psi(g_1,g_N)\rangle \tag{44}$$
$$= \sum_{g_2,\ldots,g_{N-1}} \prod_{j=1}^{N-1} \nu(g_*,g_j,g_{j+1})\,|gg_1,gg_2,\ldots,gg_{N-1},gg_N\rangle \tag{45}$$
$$= \sum_{g_2,\ldots,g_{N-1}} \nu(g_*,g_1,g^{-1}g_2)\{\prod_{j=2}^{N-2} \nu(g_*,g^{-1}g_j,g^{-1}g_{j+1})\}\nu(g_*,g^{-1}g_{N-1},g_N)\,|gg_1,g_2,\ldots,g_{N-1},gg_N\rangle \tag{46}$$
$$= \sum_{g_2,\ldots,g_{N-1}} \nu(gg_*,gg_1,g_2)\{\prod_{j=2}^{N-2} \nu(gg_*,g_j,g_{j+1})\}\nu(gg_*,g_{N-1},gg_N)\,|gg_1,g_2,\ldots,g_{N-1},gg_N\rangle\,. \tag{47}$$

コサイクル条件

$$\nu(gg_*,g_j,g_{j+1}) = \nu(g_*,g_j,g_{j+1})\nu(g_*,gg_*,g_j)\nu(g_*,gg_*,g_{j+1})^{-1} \tag{48}$$

に注意すると，

$$U(g)\,|\Psi(g_1,g_N)\rangle \tag{49}$$
$$= \sum_{g_2,\ldots,g_{N-1}} \nu(g_*,gg_1,g_2)\nu(g_*,gg_*,gg_1)\nu(g_*,gg_*,g_2)^{-1} \tag{50}$$
$$\nu(g_*,gg_*,g_2)\{\prod_{j=2}^{N-2} \nu(g_*,g_j,g_{j+1})\}\nu(g_*,gg_*,g_{N-1})^{-1} \tag{51}$$
$$\nu(g_*,g_{N-1},gg_N)\nu(g_*,gg_*,g_{N-1})\nu(g_*,gg_*,gg_N)^{-1}\,|gg_1,g_2,\ldots,g_{N-1},gg_N\rangle \tag{52}$$
$$= \sum_{g_2,\ldots,g_{N-1}} \nu(g_*,gg_*,gg_1)\nu(g_*,gg_1,g_2)\{\prod_{j=2}^{N-2} \nu(g_*,g_j,g_{j+1})\}\nu(g_*,g_{N-1},gg_N)\nu(g_*,gg_*,gg_N)^{-1}\,|gg_1,g_2,\ldots,g_{N-1},gg_N\rangle \tag{53}$$
$$= \nu(g_*,gg_*,gg_1)\nu(g_*,gg_*,gg_N)^{-1}\,|\Psi(gg_1,gg_N)\rangle \tag{54}$$

となり，確かに基底状態多様体 $\{|\Psi(g_1,g_N)\rangle\}_{g_1,g_N\in G}$で閉じる．さらに，位相因子$\nu(g_*,gg_*,gg_1),\nu(g_*,gg_*,gg_N)^{-1}$はそれぞれ左端と右端の自由度のみによって書けていることに注意する．基底状態多様体$|\Psi(g_1,g_N)\rangle$における演算子を [2]

$$S(g)\,|\Psi(g_1,g_N)\rangle = |\Psi(gg_1,gg_N)\rangle\,, \tag{55}$$
$$N(g)\,|\Psi(g_1,g_N)\rangle = \nu(g_*,gg_*,g_1)\nu(g_*,gg_*,g_N)\,|\Psi(g_1,g_N)\rangle \tag{56}$$

と定義すると，基底状態多様体において，

$$U(g) = N(g)S(g) \tag{57}$$

[1] [3]においては系の外部にゴーストスピンを導入して相対位相を決めているが，ここでは不必要． [3]と[1]では基底状態の構成が異なる点に注意．

の表示を持つ．この表示は，左端と右端の自由度に分離し，端の自由度を$|g_1\rangle, |g_N\rangle$と書くと，

$$U_1(g) = N_1(g)S_1(g), \quad U_1(g)|g_1\rangle = \nu(g_*, gg_*, g_1)|gg_1\rangle, \tag{58}$$
$$U_N(g) = N_N(g)S_N(g), \quad U_N(g)|g_N\rangle = \nu(g_*, gg_*, g_N)^{-1}|gg_N\rangle \tag{59}$$

となる．さらに，$g_* = e$とすると，$\nu(e, g, gh) = \omega(g, h)$より，

$$U_1(g)|g_1\rangle = \omega(g, g_1)|gg_1\rangle, \quad U_N(g)|g_N\rangle = \omega(g, g_N)^{-1}|gg_N\rangle \tag{60}$$

となるが，それぞれ2コサイクルω, ω^{-1}で与えられる正則表現に他ならない．

3.2 空間２次元

続けて空間２次元の場合を計算する． 2単体の符号$\mathrm{sgn}\,\Delta$を，012が反時計回りの場合は+1，012が時計回りの場合は-1とする．最初から$g_* = e$とする．境界スピンg_nで指定される基底状態波動関数は

$$|\Psi(\{g_n\})\rangle = \sum_{\{g_j\}} \prod_{\Delta} \nu(e, g_0, g_1, g_2)^{\mathrm{sgn}\,\Delta} |\{g_j\}, \{g_n\}\rangle. \tag{61}$$

対称性変換は

$$U(g)|\Psi(\{g_n\})\rangle \tag{62}$$
$$= \sum_{\{g_j\}} \prod_{\Delta} \nu(e, g_0, g_1, g_2)^{\mathrm{sgn}\,\Delta} |\{gg_j\}, \{gg_n\}\rangle. \tag{63}$$

ここで，バルクの単体からの寄与については

$$\sum_{\{g_j\}} \cdots \nu(e, g_0, g_1, g_2)^{\mathrm{sgn}\,\Delta} \cdots |\cdots gg_0, gg_1, gg_2 \cdots\rangle \tag{64}$$
$$= \sum_{\{g_j\}} \cdots \nu(e, g^{-1}g_0, g^{-1}g_1, g^{-1}g_2)^{\mathrm{sgn}\,\Delta} \cdots |\cdots g_0, g_1, g_2 \cdots\rangle \tag{65}$$
$$= \sum_{\{g_j\}} \cdots \nu(g, g_0, g_1, g_2)^{\mathrm{sgn}\,\Delta} \cdots |\cdots g_0, g_1, g_2 \cdots\rangle \tag{66}$$

となるが，同じ変換を境界を含む単体について実行すると，例えば，$0, 1$を境界自由度として，

$$\sum_{\{g_j\}} \cdots \nu(e, g_0, g_1, g_2)^{\mathrm{sgn}\,\Delta} \cdots |\cdots gg_0, gg_1, gg_2 \cdots\rangle \tag{67}$$
$$= \sum_{\{g_j\}} \cdots \nu(e, g_0, g_1, g^{-1}g_2)^{\mathrm{sgn}\,\Delta} \cdots |\cdots gg_0, gg_1, g_2 \cdots\rangle \tag{68}$$
$$= \sum_{\{g_j\}} \cdots \nu(g, gg_0, gg_1, g_2)^{\mathrm{sgn}\,\Delta} \cdots |\cdots gg_0, gg_1, g_2 \cdots\rangle \tag{69}$$

などとなり，結局，

$$U(g)|\Psi(\{g_n\})\rangle = \sum_{\{g_j\}} \prod_{\Delta} \nu(g, \tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2)^{\mathrm{sgn}\,\Delta} |\{g_j\}, \{gg_n\}\rangle, \tag{70}$$

となる．ここで，

$$\tilde{g}_x = \begin{cases} g_x & x \in \text{ bulk}, \\ gg_x & x \in \text{ bdy}, \end{cases} \tag{71}$$

である．コサイクル条件より

$$\nu(g, g_0, g_1, g_2) = \nu(e, g_0, g_1, g_2)\nu(e, g, g_1, g_2)^{-1}\nu(e, g, g_0, g_2)\nu(e, g, g_0, g_1)^{-1} \tag{72}$$

に注意すると，

$$U(g)\left|\Psi(\{g_n\})\right\rangle = \sum_{\{g_j\}}\prod_{\Delta}[\nu(e, \tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2)\nu(e, g, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2)^{-1}\nu(e, g, \tilde{g}_0, \tilde{g}_2)\nu(e, g, \tilde{g}_0, \tilde{g}_1)^{-1}]^{\operatorname{sgn}\Delta}\left|\{g_j\}, \{gg_n\}\right\rangle . \tag{73}$$

バルクでは因子$\nu(e, g, g_1, g_2)^{-1}\nu(e, g, g_0, g_2)\nu(e, g, g_0, g_1)^{-1}$がキャンセルするが，境界では因子が残り，以下を得る．

$$U(g)\left|\Psi(\{g_n\})\right\rangle = \prod_n \nu(e, g, gg_n, gg_{n+1})^{-\operatorname{sgn}\Delta^1_{n,n+1}}\left|\Psi(\{gg_n\})\right\rangle . \tag{74}$$

ここで，境界のサイトを反時計回りにラベルし，符号$\operatorname{sgn}\Delta^1_{n,n+1} \in \{\pm 1\}$は，1単体$(n, n+1)$の向きが反時計回りであれば+1, 時計回りであれば-1とした． Branching structureに依存することに注意．基底状態多様体において

$$S(g)\left|\Psi(\{g_n\})\right\rangle = \left|\Psi(\{gg_n\})\right\rangle , \tag{75}$$

$$N(g)\left|\Psi(\{g_n\})\right\rangle = \prod_n \nu(e, g, g_n, g_{n+1})^{-\operatorname{sgn}\Delta^1_{n,n+1}}\left|\Psi(\{g_n\})\right\rangle = \prod_n \omega(g, g^{-1}g_n, g_n^{-1}g_{n+1})^{-\operatorname{sgn}\Delta^1_{n,n+1}}\left|\Psi(\{g_n\})\right\rangle \tag{76}$$

を導入すると，基底状態多様体において対称性作用は

$$U(g) = N(g)S(g) \tag{77}$$

で与えられる．

References

[1] Xie Chen, Zheng-Cheng Gu, Zheng-Xin Liu, Xiao-Gang Wen, *Symmetry protected topological orders and the group cohomology of their symmetry group*, arXiv:1106.4772.

[2] Dominic V. Else, Chetan Nayak, *Classifying symmetry-protected topological phases through the anomalous action of the symmetry on the edge*, arXiv:1409.5436.

[3] Michael Levin, Zheng-Cheng Gu, *Braiding statistics approach to symmetry-protected topological phases*, arXiv:1202.3120.