SO(n)の上のループのホモトピー類の計算について

塩崎　謙

June 21, 2022

1　準備

xy平面の回転行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = e^{\theta L}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

で与えられる．より一般に，$\mathbb{R}^n$において$x_i x_j$平面における$\theta_{[ij]}$回転は，$SO(n)$行列

$$e^{\theta_{[ij]} L_{[ij]}}, \quad [L_{[ij]}]_{kl} = -\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \tag{2}$$

で与えられる．ここで，記号$[ij]$は反対称成分を表す．空間n次元においては，$[ij]$は$\frac{n(n-1)}{2}$通り存在する．任意の$SO(n)$行列Rは

$$R = e^{\sum_{[ij]} \theta_{[ij]} L_{[ij]}} \tag{3}$$

と書ける．与えられた$SO(n)$行列から$\frac{n(n-1)}{2}$個のパラメータ$\{\theta_{[ij]}\}_{[ij]}$を決めるには，以下のようにする．まずRを対角化する．

$$R = U\Lambda U^\dagger, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_j \in U(1). \tag{4}$$

Uはユニタリー行列である．固有値の集合はnの偶奇に依存して，以下の構造を持つ．

$$\{e^{i\alpha_1}, e^{-i\alpha_1}, \dots, e^{i\alpha_{n/2}}, e^{-i\alpha_{n/2}}\}, \quad (n\text{が偶数}), \tag{5}$$

$$\{e^{i\alpha_1}, e^{-i\alpha_1}, \dots, e^{i\alpha_{(n-1)/2}}, e^{-i\alpha_{(n-1)/2}}, 1\}, \quad (n\text{が奇数}). \tag{6}$$

各固有値λ_jに対して，偏角$\phi_j = \mathrm{Arg}(\lambda_j)$を

$$\boxed{-\pi < \phi_j < \pi} \tag{7}$$

なるように取る．1パラメータ族

$$R(t) = U\mathrm{diag}(e^{it\phi_1}, \dots, e^{it\phi_n})U^\dagger \tag{8}$$

が$R(0) = 1_n$と$R(1) = R$をつなぐ“最短のパス”，とみなす．もし$\mathrm{Arg}(\lambda_j) = \pi$なる固有値$\lambda_j$が含まれる場合には，$1_n$と$R$を結ぶ“最短のパス”が一意的に定まらないので，除外する． $\theta_{[ij]}$に対する線形方程式

$$\frac{d}{dt}R(t)\Big|_{t=0} = U\mathrm{diag}(i\phi_1, \dots, i\phi_n)U^\dagger = \sum_{[ij]} \theta_{[ij]} L_{[ij]} \tag{9}$$

を解いて，$\{\theta_{[ij]}\}_{[ij]}$を得る．

- この方法で得られた$\{\theta_{[ij]}\}_{[ij]}$が一意であることを示す必要あり．

2　第 1 ホモトピー類の計算

$\{\theta_{[ij]}\}_{[ij]}$を用いてリフト

$$SO(n) \to Spin(n) \tag{10}$$

をひとつ固定する． $\{L_{[ij]}\}_{[ij]}$と構造定数が共通な$Spin(n)$群の生成子は， $\{\gamma_i\}_{i=1,\ldots,n}$を

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij} \tag{11}$$

を満たすガンマ行列として，

$$\Sigma_{[ij]} = \frac{[\gamma_i, \gamma_j]}{-4} \tag{12}$$

によって与えられる．リフトを

$$e^{\sum_{[ij]} \theta_{[ij]} L_{[ij]}} \mapsto e^{\sum_{[ij]} \theta_{[ij]} \Sigma_{[ij]}} \tag{13}$$

によって定める．

　空間$SO(n)$における点列$(R_1, \ldots, R_N)$に対して， $R_1 \to R_2 \to \cdots \to R_N \to R_1$を順番に，前節で定義した“最短のパス”で結んだ場合の第 1 ホモトピー類を計算する．

$$R^{p\to p+1} = R_{p+1} R_p^{-1} \tag{14}$$

とする． $R^{p\to p+1}$の固有値に-1が含まれていれば“最短のパス”が一意でないので，点列$(R_1, \ldots, R_N)$が不適切として除外する．前節の手法に従って，

$$R^{p\to p+1} = e^{\sum_{[ij]} \theta_{[ij]}^{p\to p+1} \Sigma_{[ij]}} \tag{15}$$

で決まるN個のパラメータの組$\{\theta^{p\to p+1}[ij]\}_{[ij]}$を計算する． $Spin(n)$行列

$$q := e^{\sum_{[ij]} \theta_{[ij]}^{N\to 1} \Sigma_{[ij]}} \ldots e^{\sum_{[ij]} \theta_{[ij]}^{2\to 3} \Sigma_{[ij]}} e^{\sum_{[ij]} \theta_{[ij]}^{1\to 2} \Sigma_{[ij]}} \tag{16}$$

を計算する．構成より，$q \in \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$である．

- $q = \mathbf{1}$のとき，ホモトピー類は自明.
- $q = -\mathbf{1}$のとき，ホモトピー類は非自明.

3　具体例：$SO(4)$

$$\{L_{[12]}, L_{[23]}, L_{[31]}, L_{[14]}, L_{[24]}, L_{[34]}\} \tag{17}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & \\ -1 & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & \\ & & & -1 \\ & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix} \right\} \tag{18}$$

とする．ガンマ行列は，例えば，

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\} = \{\sigma_x \tau_x, \sigma_y \tau_x, \sigma_z \tau_x, \tau_y\} \tag{19}$$

とする．

$$\Sigma_{[ij]} = \frac{[\gamma_i, \gamma_j]}{-4}, \tag{20}$$

$$(\Sigma_{[12]}, \Sigma_{[23]}, \Sigma_{[31]}, \Sigma_{[14]}, \Sigma_{[24]}, \Sigma_{[34]}) = -\frac{i}{2}(\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_x \tau_z, \sigma_y \tau_z, \sigma_z \tau_z) \tag{21}$$

とすると，$L_{[ij]}$と$\Sigma_{[ij]}$は同一の構造定数を持つことがわかる．

$SO(4)$内の点列として，以下を考える．

$$R_1 = 1_4, \tag{22}$$

$$R_2 = e^{\frac{\pi}{2}L_{[12]}+\frac{\pi}{2}L_{[34]}} = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$R_3 = e^{\pi L_{[12]}+\pi L_{[34]}} = -I_4, \tag{24}$$

$$R_4 = e^{-\frac{\pi}{2}L_{[12]}+\frac{\pi}{2}L_{[34]}} = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}. \tag{25}$$

ブロック対角化されており，xy平面において$0 \to \pi/2 \to \pi \to 3\pi/2 \to 2\pi$回転であるので，非自明なホモトピー類に属する．定義に従って，$\{\theta_{[ij]}^{p\to p+1}\}_{[ij]}$を計算する．

$$R^{1\to 2} = e^{\frac{\pi}{2}L_{[12]}+\frac{\pi}{2}L_{[34]}} = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$R^{2\to 3} = e^{\frac{\pi}{2}L_{[12]}+\frac{\pi}{2}L_{[34]}} = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$R^{3\to 4} = e^{\frac{\pi}{2}L_{[12]}-\frac{\pi}{2}L_{[34]}} = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$R^{4\to 1} = e^{\frac{\pi}{2}L_{[12]}-\frac{\pi}{2}L_{[34]}} = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix}. \tag{29}$$

固有値の集合は全て共通で，$\{i, i, -i, -i\}$である．パラメータ$\{\theta_{[ij]}^{p\to p+1}\}_{[ij]}$を前節の方法で計算すると，$R^{p\to p+1}$の表式と同じ値

$$R^{1\to 2}, R^{2\to 3}: \quad \theta_{[ij]} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{\pi}{2}), \tag{30}$$

$$R^{3\to 4}, R^{4\to 1}: \quad \theta_{[ij]} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{\pi}{2}) \tag{31}$$

を得る．これから，

$$q^{1\to 2} = \exp\left[-\frac{\pi i}{4}\sigma_z - \frac{\pi i}{4}\sigma_z\tau_z\right], \tag{32}$$

$$q^{2\to 3} = \exp\left[-\frac{\pi i}{4}\sigma_z - \frac{\pi i}{4}\sigma_z\tau_z\right], \tag{33}$$

$$q^{3\to 4} = \exp\left[-\frac{\pi i}{4}\sigma_z + \frac{\pi i}{4}\sigma_z\tau_z\right], \tag{34}$$

$$q^{4\to 1} = \exp\left[-\frac{\pi i}{4}\sigma_z + \frac{\pi i}{4}\sigma_z\tau_z\right] \tag{35}$$

となり，

$$q^{4\to 1}q^{3\to 4}q^{2\to 3}q^{1\to 2} = -1_4 \tag{36}$$

を得る．