C^*-geometric phase: Viennot–Lages formalism（書きかけ）

Ken Shiozaki

March 7, 2026

[1]で導入された量子開放系における幾何学的位相の定式化についてまとめる．[2]にも計算例がある．

$\mathcal{H}_\mathcal{S}, \mathcal{H}_\mathcal{E}$をそれぞれ系と環境のHilbert空間とする．系と環境の合成系のHilbert空間は$\mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$である． $\mathcal{H}_\mathcal{S}$における内積を$\langle .|.\rangle_\mathcal{S}$, $\mathcal{H}_\mathcal{E}$における内積を$\langle .|.\rangle_\mathcal{E}$, 全系の内積を$\langle\langle .|.\rangle\rangle$と書く．また，全系の波動関数を$\psi$，あるいは$|\psi\rangle\rangle$と書く．系と環境のハミルトニアンをそれぞれ$H_\mathcal{S}, H_\mathcal{E}$，系と環境の相互作用を$H_I$と書く．全系のハミルトニアンは

$$H = H_\mathcal{S} \otimes 1_\mathcal{E} + 1_\mathcal{S} \otimes H_\mathcal{E} + H_I. \tag{1}$$

$\mathcal{D}(\mathcal{H}_\mathcal{S}) = \{\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{S}) | \rho^\dagger = \rho, \rho \geq 0, \mathrm{tr}_\mathcal{S}\rho = 1\}$と書く．全系の波動関数$\psi$に対して，系の密度行列$\rho$は

$$\rho = \mathrm{Tr}_\mathcal{E} |\psi\rangle\rangle\langle\langle\psi|. \tag{2}$$

Viennot–Lages定式化においては，全系のHilbert空間$\mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$を系の演算子代数$\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{S})$の$C^*$加群とみなす． C^*加群$\mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$は，以下の内積を持つ：

$$\mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E} \times \mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{S}), \tag{3}$$

$$(|\psi\rangle\rangle, |\phi\rangle\rangle) \mapsto \langle\langle\psi|\phi\rangle\rangle_* := \mathrm{Tr}_\mathcal{E} |\phi\rangle\rangle\langle\langle\psi|. \tag{4}$$

具体的には，$\mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$の基底を$|n\rangle \otimes |a\rangle$と書き，

$$\phi = \phi_{na} |n\rangle \otimes |a\rangle, \tag{5}$$

$$\psi = \psi_{na} |n\rangle \otimes |a\rangle \tag{6}$$

と書くと，

$$\langle\phi|\psi\rangle_* = \mathrm{Tr}_\mathcal{E} \sum_{namb} \phi^*_{na}\psi_{mb} \mathrm{Tr}_\mathcal{E}[|m\rangle \otimes |b\rangle \langle n| \otimes \langle a|] = \sum_{nm}\sum_a \phi^*_{na}\psi_{ma} |m\rangle \langle n|. \tag{7}$$

この内積は以下の性質を持つ：

- 右側線形，及び左側反線形である．つまり，$A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{S})$, $\psi, \phi, \chi \in \mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$に対して，

$$\langle\psi|A\phi + B\chi\rangle_* = \mathrm{Tr}_\mathcal{E}[(A|\phi\rangle\rangle + B|\chi\rangle\rangle)\langle\langle\psi|] \tag{8}$$

$$= A\langle\psi|\phi\rangle_* + B\langle\psi|\chi\rangle_*, \tag{9}$$

$$\langle A\psi + B\chi|\phi\rangle_* = \mathrm{Tr}_\mathcal{E}[(|\phi\rangle\rangle(\langle\langle\psi|A^\dagger + \langle\langle\chi|B^\dagger)] \tag{10}$$

$$= \langle\psi|\phi\rangle_* A^\dagger + \langle\chi|\phi\rangle_* B^\dagger. \tag{11}$$

- “エルミート”である．つまり，$\psi, \phi \in \mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$に対して，

$$\langle\phi|\psi\rangle_*^\dagger = (\sum_{nm}\sum_a \phi^*_{na}\psi_{ma} |m\rangle \langle n|)^\dagger \tag{12}$$

$$= \sum_{nm}\sum_a \phi_{na}\psi^*_{ma} |n\rangle \langle m| \tag{13}$$

$$= \langle\psi|\phi\rangle_* \tag{14}$$

- 正定値である．つまり，$\psi \in \mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$に対して，

$$\langle \psi | \psi \rangle_* = \sum_{nm} \sum_a \psi^*_{na} \psi_{ma} |m\rangle \langle n| \tag{15}$$

は矩形行列$\psi = (\psi)_{na}$として$\psi\psi^\dagger$であるから半正定値

$$\langle \psi | \psi \rangle_* \geq 0. \tag{16}$$

であり，また，$\psi\psi^\dagger = O$は矩形行列ψの特異値がすべて0であることを意味するから，$\langle \psi | \psi \rangle_* = 0$は$\psi = 0$を意味する．

全系の状態$\psi \in \mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$が規格化されているとき，系の密度行列$\rho$は$*$-ノルムとして

$$\rho = \|\psi\|_*^2 = \langle \psi | \psi \rangle_* \tag{17}$$

として与えられる．

Definition 1 (Eigenoperaotor and $*$-eigenvector [1])**.** Hを全系のハミルトニアンとする．以下を満たす対$E \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{S}), \phi_E \in \mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$を，それぞれ$H$の固有演算子，及び固有演算子$E$なる混合固有状態と呼ぶ：

$$[E \otimes 1_\mathcal{E}, H] = 0, \tag{18}$$
$$H\phi_E = E\phi_E. \tag{19}$$

つまり，全系の定常状態のSchrodingerを$\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{S})$加群としての固有値問題とみなしており，また，系の演算子としての固有値Eに制限をつけている． $E = \lambda 1_\mathcal{S}$のときは，通常の固有値方程式そのものである．

固有演算子E，及び混合固有状態ϕ_Eについては，[1]のAppendixにいくつか性質がまとめられている．

(i) (Property 9 in [1]) $\mathcal{L}$をLindblad演算子とする．固有演算子E，及び混合固有状態ρ_Eは以下を満たす：

$$\mathcal{L}(\rho_E) = E\rho_E - \rho_E E^\dagger, \tag{20}$$
$$\mathcal{L}(E\rho_E - \rho_E E^\dagger) = E\mathcal{L}(\rho_E) - \mathcal{L}(\rho_E)E^\dagger. \tag{21}$$

[1]には，この性質より全系のハミルトニアンHが未知であっても，Lindbrad演算子$\mathcal{L}$が与えられていれば，固有演算子Eを求めることができると主張されている．

(ii) （Property 10 in [1]） Eは次の意味でほとんどエルミートである：

$$\mathrm{tr}_\mathcal{S}[\rho_E(E - E^\dagger)] = 0. \tag{22}$$

(iii) （Proposition 11 in [1]） $[H, E_0 \otimes 1_\mathcal{E}] = 0$なる任意の$E_0$に対して，$\lambda \in \mathbb{C}, \phi_{E,\lambda}$を通常の固有値方程式の解とする：

$$H\phi_{E,\lambda} = (E_0 + \lambda)\phi_{E,\lambda}. \tag{23}$$

このとき，$E = E_0 + \lambda$なる固有演算子Eに対して，$\phi_{E,\lambda}$は混合固有状態である．

Proof. (i)は

$$\mathcal{L}(\rho_E) = \mathrm{tr}_\mathcal{E}[H, |\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|] = \mathrm{tr}_\mathcal{E}[E\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E| - |\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|E^\dagger] = E\rho_E - \rho_E E^\dagger, \tag{24}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(E\rho_E - \rho_E E^\dagger) &= \mathrm{tr}_{\mathcal{E}}([H, E|\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|] - [H, |\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|E^\dagger]) && (25)\\
&= \mathrm{tr}_{\mathcal{E}}(HE|\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E| - E|\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|H - H|\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|E^\dagger + |\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|E^\dagger H) && (26)\\
&= \mathrm{tr}_{\mathcal{E}}(EH|\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E| - E|\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|H - H|\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|E^\dagger + |\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|HE^\dagger) && (27)\\
&= E\mathcal{L}(\rho_E) - \mathcal{L}(\rho_E)E^\dagger. && (28)
\end{aligned}
$$

(ii)は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{\mathcal{S}}[\rho_E(E - E^\dagger)] &= \mathrm{tr}_{\mathcal{S}}\mathrm{tr}_{\mathcal{E}}(|\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|(E - E^\dagger)) && (29)\\
&= \langle\langle\phi_E|(E - E^\dagger)|\phi_E\rangle\rangle && (30)\\
&= \langle\langle\phi_E|(H - H^\dagger)|\phi_E\rangle\rangle && (31)\\
&= 0. && (32)
\end{aligned}
$$

(iii)は自明. □

Eを固定したときに，固有ベクトルϕ_Eの不定性について調べる． Kを環境のユニタリー変換群であり，全系のハミルトニアンを不変に保つ対称性群とする：

$$K = \{k \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}}) | (1_{\mathcal{S}} \otimes k)H(1_{\mathcal{S}} \otimes k^\dagger) = H\}. \tag{33}$$

G_Eを固有演算子Eなる固有ベクトル空間を不変に保つ系の可逆な演算子のなす部分群で最大のものとする．つまり，

$$G_E \ker(H - E \otimes 1_{\mathcal{E}}) = \{g\phi \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}} | g \in \mathcal{GL}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}}), H\phi = E\phi\} \subset \ker(H - E \otimes 1_{\mathcal{E}}) \tag{34}$$

なる$G_E \subset \mathcal{GL}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$として最大のものと定義する． G_Eは，$E = \lambda 1_{\mathcal{S}}$のときは，縮退がある場合の固有ベクトル空間を不変に保つ可逆な演算子のなす部分群に他ならない． $\phi_E \in \ker(H - E \otimes 1_{\mathcal{E}})$を選ぶことは縮退した固有ベクトル空間からひとつベクトルを選ぶことに他ならない．群$G_E \times K$は固有ベクトルϕ_Eの不定性とみなすことができる．つまり，$gk \in G_E \times K$のとき，

$$(H - E \otimes 1_{\mathcal{E}})\phi_E = 0 \quad \Rightarrow \quad (H - E \otimes 1_{\mathcal{E}})gk\phi_E = k(H - E \otimes 1_{\mathcal{E}})g\phi_E = 0. \tag{35}$$

変換$\phi_E \mapsto gk\phi_E$は密度行列の変換

$$\rho_E = \langle\phi_E|\phi_E\rangle_* \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}[gk|\phi_E\rangle\rangle\langle\langle\phi_E|g^\dagger k^\dagger] = g\rho_E g^\dagger \tag{36}$$

を引き起こす． gはユニタリーではないため，$\mathrm{tr}_{\mathcal{S}}[\rho_E] = 1$なる性質は保たれないことに注意.

さらに，部分群$J_E^0(\rho_E) \subset G_E$を以下のように導入する．密度行列$\rho_E = \langle\phi_E|\phi_E\rangle_*$に対して，$G_E$軌道を

$$G_E\rho_E := \{g\rho_E g^\dagger | g \in G_E\} \tag{37}$$

と定義する．軌道の各点$g\rho_E g^\dagger \in G_E\rho_E$における安定化群を集めた群を$J_E^0(\rho_E)$と定義する．つまり，

$$J_E^0(\rho_E) := \{j \in G_E | \exists g \in G_E, jg\rho_E g^\dagger j^\dagger = g\rho_E g^\dagger\}. \tag{38}$$

すると

$$j\rho_E j^\dagger = \rho_E \quad \Leftrightarrow \quad gjg^{-1}g\rho_E g^\dagger(gjg^{-1})^\dagger = g\rho_E g^\dagger \tag{39}$$

であるので，$J_E^0(\rho_E)$自身もρ_Eにおける安定化群を起点とするG_E軌道である：

$$J_E^0(\rho_E) = \bigcup_{g \in G_E} g\{j \in G_E | j\rho_E j^\dagger = \rho_E\}g^{-1}. \tag{40}$$

Proposition 1 (Property 11 in [1]). $J_E^0(\rho_E)$はG_Eの正規部分群である． [a]

[a] 2ゲージ群の一般論として，包含$t : J \to G$の像がGの正規部分群であることが必要である.

Proof. $j \in J^0_E(\rho_E)$のとき，ある$g \in G_E$が存在して$jg\rho_E g^\dagger j^\dagger = g\rho_E g^\dagger$を満たす． $h \in G_E$のとき，$hjh^{-1}hg\rho_E(hg)^\dagger(hjh^{-1})^\dagger = hjg\rho_E g^\dagger j^\dagger h^\dagger = hg\rho_E(hg)^\dagger$であるから，$hjh^{-1} \in J^0_E(\rho_E)$である． □

注意：[1]ではρ_Eがフルランクでない場合にJ^1を導入し，そのLie環が可解である（Property 12）と主張しているが，(A.10)式が間違っている．この時点ではJ^1を導入する必要性がないため，現時点ではJ^1を導入しないことにする．

ここまで，単一のH, Eを考えてきた．以降，HとEがパラメータ空間Mの点に依存する場合を考え，M上滑らかな固有演算子$E(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{S})$,

$$[H(x), E(x) \otimes 1_\mathcal{E}] = 0, \quad x \in M \tag{41}$$

が与えられている状況を考える． MのパッチU^α毎に，“ゲージ固定”として，固有ベクトル

$$H(x)\phi_E(x) = E(x)\phi_E(x), \quad x \in U^\alpha \tag{42}$$

を与える．すると，密度行列$\rho^\alpha_E(x) = \langle \phi^\alpha_E(x) | \phi^\alpha_E(x) \rangle_*$のパッチ変換は

$$\rho^\alpha_E(x) = g^{\alpha\beta}(x)\rho^\beta_E(x)g^{\alpha\beta}(x)^\dagger, \quad g^{\alpha\beta}(x) \in G_{E(x)}, \quad x \in U^\alpha \cap U^\beta \tag{43}$$

として与えられる．すると，

$$\rho^\alpha_E(x) = g^{\alpha\beta}(x)g^{\beta\gamma}(x)g^{\gamma\alpha}(x)\rho^\alpha_E(x)(g^{\alpha\beta}(x)g^{\beta\gamma}(x)g^{\gamma\alpha}(x))^\dagger, \quad x \in U^\alpha \cap U^\beta \cap U^\gamma \tag{44}$$

より，積$g^{\alpha\beta}(x)g^{\beta\gamma}(x)g^{\gamma\alpha}(x)$は$\rho^\alpha_E(x)$の安定化群$\{g \in G_{E(x)} | g\rho^\alpha_E(x)g^\dagger = \rho^\alpha_E(x)\}$に属する． $J^0_{E(x)}(\rho_E(x))$の定義はゲージ等価$\rho_E(x) \sim g\rho_E(x)g^\dagger$な密度行列の安定化群を集めたものであるのでパッチの添字をつける必要がなく，

$$h^{\alpha\beta\gamma}(x) := g^{\alpha\beta}(x)g^{\beta\gamma}(x)g^{\gamma\alpha}(x) \in J^0_{E(x)}(\rho_E(x)) \tag{45}$$

に属する．したがって，コサイクル条件が満たされず，2ゲージ理論の構造が現れる，というのが[1]の主張である．

接続を導入する． $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{S})$値の1-form Aを，局所的に与えられた$\phi_E(x)$に対して，以下が満たされるように定義する：

$$\mathcal{A}\|\phi_E\|^2_* = \langle \phi_E | d\phi_E \rangle_* . \tag{46}$$

この定義は，環境とのゲインとロスが存在するような非エルミートな系に対するBerry接続の定義を一般化したものであると[1]では述べられている． $\rho_E = \|\phi_E\|^2_*$に注意すると，$\mathcal{A}$は以下を満たす：

$$d\rho_E = \mathcal{A}\rho_E + \rho_E\mathcal{A}^\dagger. \tag{47}$$

Proof.

$$\begin{aligned} d\rho_E &= d\langle \phi_E | \phi_E \rangle_* & (48)\\ &= \langle d\phi_E | \phi_E \rangle_* + \langle \phi_E | d\phi_E \rangle_* & (49)\\ &= \mathcal{A}\|\phi_E\|^2_* + \|\phi_E\|^2_*\mathcal{A}^\dagger & (50)\\ &= \mathcal{A}\rho_E + \rho_E\mathcal{A}^\dagger. & (51) \end{aligned}$$

□

ゲージ変換

$$\tilde{\phi}_E = gk\phi_E, \quad g \in G_E, k \in K \tag{52}$$

に対して，接続$\mathcal{A}$は以下のように変換する．

$$\tilde{\mathcal{A}}\|\tilde{\phi}_E\|^2 = \langle\tilde{\phi}_E|d\tilde{\phi}_E\rangle_* \tag{53}$$
$$= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}[(dgk|\phi_E\rangle\rangle + gdk|\phi_E\rangle\rangle + gk|d\phi_E\rangle\rangle)\langle\langle\phi_E|g^\dagger k^\dagger] \tag{54}$$
$$= dg\rho_E g^\dagger + g\,\langle\phi_E|k^\dagger dk|\phi_E\rangle_*\,g^\dagger + g\mathcal{A}\rho_E g^\dagger. \tag{55}$$

$\|\tilde{\phi}_E\|^2 = g\rho_E g^\dagger$に注意すると，

$$g^{-1}\tilde{\mathcal{A}}g\rho_E = \mathcal{A}\rho_E + g^{-1}dg\rho_E + \langle\phi_E|k^\dagger dk|\phi_E\rangle_*\,. \tag{56}$$

ここで，ηを

$$\eta\|\phi_E\|^2 = \langle\phi_E|k^\dagger dk|\phi_E\rangle_* \tag{57}$$

なる解として導入すると，

$$g^{-1}\tilde{\mathcal{A}}g\rho_E = (\mathcal{A} + g^{-1}dg + \eta)\rho_E. \tag{58}$$

[1]では一般にはρ_Eが非可逆であることに注意しておきながら，次のステップで

$$g^{-1}\tilde{\mathcal{A}}g = \mathcal{A} + g^{-1}dg + \eta. \tag{59}$$

と結論付けているが，これはρ_Eが可逆である場合に限って成り立つため間違い． [1]のApp.Bでは，ρ_Eが非可逆な場合のゲージ変換について，ゲージ群J^1との関係が述べられている． ηは通常のゲージ変換からのズレを表し，２ゲージ理論に特徴的であるが，ηの取りうる値を確認しておくと，

$$\eta\rho_E + \rho_E\eta = \langle\phi_E|k^\dagger dk|\phi_E\rangle_* + \langle\phi_E|k^\dagger dk|\phi_E\rangle_*^\dagger = \langle\phi_E|k^\dagger dk + dk^\dagger k|\phi_E\rangle_* = 0 \tag{60}$$

より，ηはρ_Eの安定化群（$J^0_E(\rho_E)$の部分群）のLie環に属することがわかる．つまり，コサイクル条件の破れが属するLie環である．また構成より，ηは環境のゲージ変換由来で生じることに注意．

References

[1] David Viennot, Jose Lages, *A new kind of geometric phases in open quantum systems and higher gauge theory*, arXiv:1101.2852.

[2] David Viennot, Jose Lages, *C^*-geometric phase for mixed states: entanglement, decoherence and spin system*, arXiv:1101.2852.