結晶対称性によって保護されたDelicate絶縁体についてのメモ

塩崎　謙

July 14, 2024

Abstract

Nelsonさんに結晶対称性によって保護された delicate 絶縁体 [1]の簡単な例について教えて頂いたので，そのメモ．

空間２次元，並進対称性＋鏡映対称性を考える．

$$(x,y) \mapsto (x+1,y), \quad (x,y) \mapsto (x,y+1), \quad R:(x,y) \mapsto (-x,y). \tag{1}$$

2×2模型を考える．つまり，単位胞内の自由度は２．

$$RH(k_x,k_y)R^{-1} = H(-k_x,k_y), \quad R^2=1. \tag{2}$$

ここで，$R(k_x)$はk_x依存しないものを仮定する．バンドギャップの存在を仮定する．さらに，$k_x = 0,\pi$における占有状態と非占有状態のRの表現は以下とする：

	$k_x=0$	$k_x=\pi$
empty	$-$	$-$
occupied	$+$	$+$

(3)

鏡映線上の任意のk_yで成立することに注意せよ．したがって，

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

なる表示のもと，$k_x=0,\pi$におけるBloch状態はk_y依存せず，

$$u(k_x \in \{0,\pi\},k_y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる．占有状態から定義されたk_y方向のWilson lineを

$$e^{i\gamma(k_x)} = e^{-\oint dk_y \langle u(k_x,k_y)|\partial_{k_y} u(k_x,k_y)\rangle} \tag{6}$$

とする． $k_x=0,\pi$においてはk_y依存しないため，

$$e^{i\gamma(k_x=0)} = e^{i\gamma(k_x=\pi)} = 1 \tag{7}$$

が成立する．よって，$k_x = 0 \to \pi$においてBerry位相$\gamma(k_x)$の巻き付き数が定義され，$\mathbb{Z}$分類を得る．

非占有状態に$R=-$なる状態をいくら加えても結論は同じだが，$R=+$なる状態を非占有状態に加えると，$k_x=0,\pi$におけるBloch状態は

$$u(k_x \in \{0,\pi\},k_y) = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

などとなり，よって任意のBerry位相$\gamma(k_x \in \{0,\pi\})$を取るため，$\mathbb{Z}$分類が破れる．

References

[1] Aleksandra Nelson, Titus Neupert, Tomas Bzdusek, and A. Alexandradinata, *Multicellularity of delicate topological insulators*, arXiv:2009.01863