# Detectability lemma

塩崎　謙

July 15, 2024

**Abstract**

[1]に従って，Detactability lemmaの証明をメモする． [2]にはより簡単な証明が書かれているらしいが，こちらは未確認.

設定を述べる． 1次元格子上のHilbert空間$\mathcal{H} = (\mathbb{C}^d)^{\otimes n}$を考える． $n$はサイト数．ハミルトニアン$H = \sum_i H_i$の局所項$H_i$は近接２サイトにのみ台を持つものとする．この仮定はfinite rangeであればいつでもこのように取ることができる． $H_i$の最低固有値は0であり，最低固有値に縮退はないものとする． $H \geq 0$である．なぜなら，任意の状態$|\psi\rangle$に対して

$$\langle \psi \,|\, H \,|\, \psi \rangle = \sum_i \langle \psi \,|\, H_i \,|\, \psi \rangle \tag{1}$$

であるが，$\langle \psi \,|\, H_i \,|\, \psi \rangle \geq 0$より． **基底状態は一意でなくても良いが，縮退があればエネルギー固有値は完全に縮退しているものとする．** 基底状態の部分空間を$\mathcal{H}_0$，その直交補空間を$\mathcal{H}'$と書く． $H$のスペクトルギャップを$\epsilon > 0$とする．つまり，

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}' \Rightarrow \langle \psi \,|\, H \,|\, \psi \rangle \geq \epsilon > 0 \tag{2}$$

を仮定する．ハミルトニアンはfrustration freeとする．つまり，

$$|\Omega\rangle \in \mathcal{H}_0 \Leftrightarrow {}^{\forall} i, H_i \,|\Omega\rangle = 0, \tag{3}$$

が成立しているものとする．局所ハミルトニアン$H_i$を“平坦化”した直交射影を，$H_i$の最低固有値を0に，それ以外の固有値が1になるように変形したものとして定義する．具体的には，$H_i = \sum_{E_n^{(i)}>0} E_n^{(i)} \,|n^{(i)}\rangle \langle n^{(i)}|$と対角化して$Q_i = \sum_{E_n^{(i)}>0} |n^{(i)}\rangle \langle n^{(i)}|$とすれば良い．この変形はfrustration free条件を保つ．つまり，

$$|\Omega\rangle \in \mathcal{H}_0 \Leftrightarrow {}^{\forall} i, Q_i \,|\Omega\rangle = 0. \tag{4}$$

射影$P_i = 1 - Q_i = |0^{(i)}\rangle \langle 0^{(i)}|$を導入する．

$$|\Omega\rangle \in \mathcal{H}_0 \Leftrightarrow {}^{\forall} i, P_i \,|\Omega\rangle = |\Omega\rangle \,. \tag{5}$$

各サイトにおける基底状態への射影の積からなる，次の演算子を導入する．

$$A := \Pi_{\mathrm{even}} \Pi_{\mathrm{odd}}, \tag{6}$$
$$\Pi_{\mathrm{even}} = P_2 P_4 P_6 \cdots, \tag{7}$$
$$\Pi_{\mathrm{odd}} = P_1 P_3 P_5 \cdots. \tag{8}$$

ここで，隣り合った射影$P_{2i-1}, P_{2i}$，$P_{2i}, P_{2i+1}$は可換ではないが，それ以外は可換であることに注意．また

$$|\Omega\rangle \in \mathcal{H}_0 \Rightarrow A \,|\Omega\rangle = A^{\dagger} \,|\Omega\rangle = |\Omega\rangle \tag{9}$$

に注意．また，

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}' \Rightarrow A \,|\psi\rangle \in \mathcal{H}' \tag{10}$$

が成立する．なぜなら$\langle \Omega \,|\, A \,|\, \psi \rangle = \langle \Omega \,|\, \psi \rangle = 0$より$A\,|\psi\rangle$は基底状態の成分がゼロ．結局，$A$は$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}'$なる分解において

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & A|_{\mathcal{H}'} \end{pmatrix} \tag{11}$$

なる表示を持つ． $A$は基底状態を保ち，励起状態の成分を減じる性質があるため，十分大きい$l$に対して，$A^l$は基底状態への射影に近い演算子であると期待される．局所項を平坦化したハミルトニアンを

$$H_Q = \sum_i Q_i \tag{12}$$

とする．この変形で基底状態は不変に保たれ，かつ，スペクトルギャップも有限に保たれるものと仮定する [1]． $H_Q$のスペクトルギャップを$\epsilon_Q$とする． Detectability lemmaの主張は以下．

$$||A|_{\mathcal{H}'}|| < \frac{1}{(\epsilon_Q/2+1)^{\frac{1}{3}}}. \tag{13}$$

つまり，$A$の$\mathcal{H}'$への作用はスペクトルギャップが有限であれば真に1より小さい．（証明）直交補空間から規格化された状態$|\psi\rangle \in \mathcal{H}'$をひとつ取る． $|\phi\rangle := A\,|\psi\rangle$とする． $|\phi\rangle \in \mathcal{H}'$であるので

$$\langle \phi \,|\, H_Q \,|\, \phi \rangle \geq \epsilon_Q ||\phi||^2 \tag{14}$$

が成立． $\langle \phi \,|\, H_Q \,|\, \phi \rangle$を上から評価する．まず，$Q_{i\in \mathrm{odd}} \Pi_{\mathrm{odd}} = 0$であるから，$i \in \mathrm{odd}$は寄与しないことに注意． $A$を以下のように変形する．

$$A = \underbrace{(P_1P_3P_2)}_{\Delta_1}\underbrace{(P_5P_7P_6)}_{\Delta_2}\cdots\underbrace{(P_4P_8\cdots)}_{R} =: \Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_m R. \tag{15}$$

$m \sim n/4$である．$R^\dagger = R$に注意． $\langle \phi \,|\, Q_{4i-2} \,|\, \phi \rangle$を評価する．

$$\begin{aligned} \langle \phi \,|\, Q_{4i-2} \,|\, \phi \rangle &= ||(1-P_{4i-2})A\psi|| = ||(1-P_{4i-2})\Delta_1\Delta_2\cdots R\psi|| && (16)\\ &= ||\Delta_1\cdots\Delta_{i-1}(1-P_{4i-2})\Delta_i\cdots R\psi|| \leq ||(1-P_{4i-2})\Delta_i\cdots R\psi||. && (17) \end{aligned}$$

$||Av|| \leq ||A|| ||v||$に注意 [2]．

$$v_i = \Delta_i\Delta_{i+1}\cdots R\,|\psi\rangle, \quad v_{m+1} = R\,|\psi\rangle, \tag{18}$$

と置く．

$$||v_i|| = ||\Delta_i v_{i+1}|| \leq ||\Delta_i|| ||v_{i+1}|| \leq ||v_{i+1}|| \tag{19}$$

に注意．

$$\langle \phi \,|\, Q_{4i-2} \,|\, \phi \rangle \leq ||(1-P_{4i-2})\Delta_i v_{i+1}||^2 = ||(1-P_{4i-2})P_{4i-3}P_{4i-1}P_{4i-2}v_{i+1}||^2, \quad v_i = \Delta_i v_{i+1}, \tag{20}$$

なる表式．すると，(35)より（$X = P_{4i-3}P_{4i-1}, Y = P_{4i-2}, v = v_{i+1}/||v_{i+1}||$とする），

$$||(1-P_{4i-2})\Delta_i v_{i+1}||^2 \leq (1 - \frac{||v_i||^2}{||v_{i+1}||^2})\frac{||v_i||^2}{||v_{i+1}||^2}||v_{i+1}||^2 \leq (1 - \frac{||v_i||^2}{||v_{i+1}||^2}) \tag{21}$$

と評価できる．$||v_i|| \leq ||v_{m+1}|| = ||R\,|\psi\rangle\,|| \leq ||R|| = 1$に注意．

$$a_i = \frac{||v_i||^2}{||v_{i+1}||^2}, i = 1, \ldots, m, \quad a_{m+1} = ||R\psi||^2, \tag{22}$$

$$a_1\cdots a_{m+1} = ||v_1||^2 = ||\phi||^2 \tag{23}$$

[1]示していない．

[2]$||A|| := \max v \neq 0 ||Av||/||v|| \geq ||Av||/||v||$より．

と置くと，結局

$$\langle\phi\,|\,Q_{4i-2}\,|\,\phi\rangle \le 1 - a_i \tag{24}$$

が得られた．結局以下の評価が得られた．

$$\langle\phi|\sum_i Q_{4i-2}|\phi\rangle = \sum_{i=2,6,\cdots}(1-a_i), \quad a_1\cdots a_{m+1} = ||\phi||^2. \tag{25}$$

Lagrange未定乗数法で極値を求めると [3]，$a_i = ||\phi||^{2/m+1}$のとき最大値を取る．よって

$$\langle\phi|\sum_i Q_{4i-2}|\phi\rangle \le m(1-||\phi||^{\frac{2}{m}}). \tag{26}$$

$m$に依存しない評価がほしい． $||\phi||^2 = 1+\delta x$として展開すると

$$m(1-(1+\delta x)^{1/m}) \sim -\delta x + \frac{1}{2}\frac{1}{m}(1-\frac{1}{m})\delta x^2. \tag{27}$$

ここで$1/m(1-1/m) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2}-\frac{1}{m})^2$であるから

$$-\delta x + c\delta x^2, \quad c \ge \frac{1}{8} \tag{28}$$

なる関数で上から押さえれば良いだろう．

$$m(1-x^{\frac{1}{m}}) \le \frac{1-x}{\sqrt{x}}, \quad x\in[0,1] \tag{29}$$

が示される [4]．よって

$$\langle\phi|\sum_i Q_{4i-2}|\phi\rangle \le \frac{1-||\phi||^2}{||\phi||}. \tag{30}$$

同様に，$Q_{4i}$に対しても，例えば$A = P_2P_1(P_4P_6\cdots)(P_3P_5\cdots)$と再定義すれば，同様にして

$$\langle\phi|\sum_{i=4,8,\ldots,} Q_{4i}|\phi\rangle \le \frac{1-||\phi||^2}{||\phi||} \tag{31}$$

が得られる [5]．

以上より，

$$\epsilon_Q||\phi||^2 \le \langle\phi|H_Q|\phi\rangle \le 2\frac{1-||\phi||^2}{||\phi||} \tag{32}$$

が得られた．これから

$$\epsilon_Q||\phi||^3 \le 2(1-||\phi||^2) \le 2(1-||\phi||^3) \tag{33}$$

となり，

$$||\phi|| \le \frac{1}{(1+\epsilon_Q/2)^{\frac{1}{3}}} \tag{34}$$

を得る． □

[3] 対称式だから$a_i = \mathrm{const.}$で極値を取るのは自明か．

[4] $f_m(x) = m\sqrt{x}(1-x^{1/m}) - (1-x)$と置くと，$f''_m(x) = \frac{(m^2-4)x^{\frac{1}{m}}-m^2}{4mx^{\frac{3}{2}}} \ge 0$が示される．よって$f'_m(x)$は$[0,1]$で単調減少であるが，$f'_m(1) = 0$であるので$f'_m(x\in[0,1]) \ge 0$が示される．よって$f_m(x)$は$[0,1]$で単調増加であるが，$f_m(1) = 0$より$f_m(x\in[0,1]) \le 0$.

[5] 有限サイトでは，右端の境界で何が起こっているかをきちんと考える必要があるだろう．

## A　補題

以下の補題を示す．$\mathcal{H}$をHilbert空間，$X, Y$を直交射影とする．$v \in \mathcal{H}$をノルムが1のベクトルとする．$||XYv|| = 1 - \epsilon$とする．次が成立：

$$||(1-Y)XYv||^2 \leq \epsilon(1-\epsilon). \tag{35}$$

(証明) まず，任意の直交射影$P$に対して，

$$||(1-P)v||^2 + ||Pv||^2 = ((1-P)v, (1-P)v) + (Pv, Pv) = (v, (1-P)v) + (v, Pv) = (v, v) = ||v||^2 \tag{36}$$

が成立することに注意する．示したいことは

$$||(1-Y)XYv||^2 = ||XYv||^2 - ||YXYv||^2 = 1 - \epsilon - ||YXYv||^2 \leq \epsilon(1-\epsilon) \tag{37}$$

であるので，

$$||YXYv|| \geq 1 - \epsilon \tag{38}$$

を示せば良い．

$$||XYv||^2 = (XYv, XYv) = (v, YXYv) \leq ||v|| \cdot ||YXYv|| = ||YXYv|| \tag{39}$$

より．□

## References


[1] Dorit Aharonov, Itai Arad, Zeph Landau, Umesh Vazirani, *Quantum Hamiltonian complexity and the detectability lemma*, arXiv:1011.3445.

[2] Anurag Anshu, Itai Arad, Thomas Vidick, *A simple proof of the detectability lemma and spectral gap amplification*, arXiv:1602.01210.