Eckart-Young-Mirskyの定理

塩崎　謙

July 26, 2024

Abstract

行列をあるランクkの行列で近似する，Eckart–Young-Mirskyの定理の証明のメモ．

$m \times n$行列$A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$に対して，$A$の特異値分解を

$$A = U\Sigma V^\dagger = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}(A)} \sigma_i u_i v_i^\dagger, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \tag{1}$$

とする． Frobeniusノルムの定義は

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\mathrm{tr}\,[A^\dagger A]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}(A)} \sigma_i^2}. \tag{2}$$

ここで，σ_iはAの特異値.

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^\dagger \tag{3}$$

と書く．主張は以下.

2ノルム, Frobeniusノルムの意味で，Aのランクkの行列による最良の近似はA_kで与えられる．つまり，任意のランクkの行列B_kに対して，

$$||A - B_k||_F \geq ||A - A_k||_F, \quad ||A - B_k||_2 \geq ||A - A_k||_2, \tag{4}$$

が成立する.

[1]の証明のメモ． Wyelの不等式より，任意のi, jに対して，

$$\sigma_{i+j-1}(X + Y) \leq \sigma_i(X) + \sigma_j(Y) \tag{5}$$

が成立． Bのランクをkとする． $\sigma_{i>k}(B) = 0$に注意． $j = k + 1, X = A - B, Y = B$として，

$$\sigma_{i+k}(A) \leq \sigma_i(A - B) + \sigma_{k+1}(B) = \sigma_i(A - B). \tag{6}$$

すると，

$$||A - B||_2 = \sigma_1(A - B) \geq \sigma_{k+1}(A) = \sigma_1(A - A_k). \tag{7}$$

$$||A - B||_F^2 = \sum_i \sigma_i^2(A - B) \geq \sum_i \sigma_{i+k}^2(A) = ||A - A_k||_F. \tag{8}$$

系として以下を得る.

規格化された状態$|\psi\rangle$に対して，Schmidt分解を$|\psi\rangle = \sum_{i\geq 1} \lambda_i \, |L_i\rangle \, |R_i\rangle$とする． $|\phi_k\rangle$をSchmidtランクkの規格化された状態とする．次が成立する．

$$|\, \langle\psi|\phi_k\rangle \, | \leq \sum_{i\leq k} \lambda_i^2. \tag{9}$$

（証明）kランク近似を$|\psi_k\rangle = \sum_{i\leq k} \lambda_i \, |L_i\rangle \, |R_i\rangle$とする． (8)より

$$||\, |\psi\rangle - |\phi_k\rangle \, ||^2 \geq ||\, |\psi\rangle - |\psi_k\rangle \, ||^2 \tag{10}$$

である．

$$2 - 2\mathrm{Re}\, \langle\psi|\phi_k\rangle \geq 1 + \langle\psi_k|\psi_k\rangle - 2\mathrm{Re}\, \langle\psi|\psi_k\rangle \tag{11}$$

より

$$\mathrm{Re}\, \langle\psi|\phi_k\rangle \leq \mathrm{Re}\, \langle\psi|\tilde{\psi}_k\rangle + 1 - \langle\psi_k|\psi_k\rangle /2 \leq \sum_{i\leq k} \lambda_i^2 \tag{12}$$

$|\phi_k\rangle$の位相は任意なので，主張を得る．

References

[1] Physics Stack Exchange, *Proof of Eckart-Young-Mirsky theorem*, url.