

メモ：stable framed cobordism について

塩崎謙

July 18, 2025

1 メモ

n 次元コンパクト多様体 M_n に対して、フレーミング ψ とは TM の大域的なフレームをひとつ与えること：

$$\psi : TM \cong M \times \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

注意として、フレーミングが取れるとは限らないし、一意とも限らない。例えば、 TS^2 は大域的フレームを持たない。2つのフレーミング $(M_n, \psi), (M'_n, \psi')$ が与えられれば、

$$\psi' \circ \psi^{-1} : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

によって

$$g : \psi' \circ \psi^{-1} : M \rightarrow O(n) \quad (1.3)$$

が定まるため、ホモトピーセット

$$[M, O(n)] \quad (1.4)$$

だけ異なるフレーミングが存在する。

$(M_n, \psi), (M'_n, \psi')$ がフレーム付きコボルダント

$$(M_n, \psi) \sim (M'_n, \psi') \quad (1.5)$$

とは、 $\partial W_{n+1} = M_n \sqcup (-M'_n)$ なる W_{n+1} が存在して、 TW_n のフレーミングを取ることができ、境界上への制限が $(M_n, \psi), (M'_n, \psi')$ に一致すること。

Stable framed cobordismにおいては、自明束の直和を許して framed cobordant かどうかを問う。つまり、 M_n が安定フレーミングを持つとは、ある k に対して、

$$TM \oplus \mathbb{R}^k \quad (1.6)$$

がフレーミングを持つ場合を指す。例えば、 $TS^2 \oplus \mathbb{R} \cong TS^2 \oplus NS^2 \cong \mathbb{R}^3$ であるから、 S^2 は安定フレーミングを持つ。安定フレーミングの意味で $(M, \psi), (M', \psi')$ がコボルダントである場合に、stable framed cobordant と呼び、同値類を Ω_n^{fr} と書き、framed cobordism groupと呼ぶ。

事実として、 S^1 上のスピンの同型類と Ω_1^{fr} が同型。よって、 S^1 上のスピン構造は、安定フレーミングによって記述することができる。 S^1 の座標を t とする。Rセクターは、

$$TS^1 \rightarrow \mathbb{R}\partial_t \quad (1.7)$$

によって与えられ、NSセクターは

$$TS^1 \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\partial_t \oplus \mathbb{R}\mathbf{n} \cong TD^2|_{\partial D^2} \quad (1.8)$$

と選ぶことに相当する。ここで、 $\mathbf{n}$ は点 $t \in S^1$ における S^1 の法線方向の単位ベクトル。