Kitaev鎖の基底状態

塩崎　謙

March 11, 2022

Abstract

導出する機会が多いので，まとめておく．

1 Kitaev鎖

$a_j, a_j^\dagger$をサイトjにおいて定義された複素フェルミオンの生成，及び消滅演算子とする．ハミルトニアンを [1]

$$H = \sum_j \left[-t(a_{j+1}^\dagger a_j + h.c.) - \mu(a_j^\dagger a_j - \frac{1}{2}) + \Delta(a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger + h.c.) \right] \tag{1}$$

とする． t, μは実，Δは複素数とする． [1] サイト数Lの閉じた鎖を考える場合は，周期境界条件（PBC）と半周期境界条件（APBC）を考えることができ，境界項はPBCの場合は

$$-t(a_1^\dagger a_L + h.c.) + \Delta(a_1^\dagger a_L^\dagger + h.c.). \tag{2}$$

一方でAPBCの場合はこの項の全体を(-1)倍したもの

$$-[-t(a_1^\dagger a_L + h.c.) + \Delta(a_1^\dagger a_L^\dagger + h.c.)] \tag{3}$$

となる．

$\Delta = |\Delta| e^{i\theta}, |\Delta| \geq 0$とする．

$$\tilde{a}_j^\dagger = e^{i\theta/2} a_j^\dagger \tag{4}$$

と再定義すると，

$$H = \sum_j \left[-t(\tilde{a}_{j+1}^\dagger \tilde{a}_j + h.c.) - \mu(\tilde{a}_j^\dagger \tilde{a}_j - \frac{1}{2}) + |\Delta|(\tilde{a}_{j+1}^\dagger \tilde{a}_j^\dagger + h.c.) \right] \tag{5}$$

Majoranaフェルミオンを

$$c_{2j-1} = \tilde{a}_j + \tilde{a}_j^\dagger = e^{-i\theta/2} a_j + e^{i\theta/2} a_j^\dagger, \tag{6}$$
$$c_{2j} = -i(\tilde{a}_j - \tilde{a}_j^\dagger) = -i(e^{-i\theta/2} a_j - e^{i\theta/2} a_j^\dagger) \tag{7}$$

と定義，同じことだが

$$\tilde{a}_j = \frac{c_{2j-1} + ic_{2j}}{2}, \quad \tilde{a}_j^\dagger = \frac{c_{2j-1} - ic_{2j}}{2} \tag{8}$$

[1] [1]とはΔとΔ^*の定義を入れ替えている．

として導入する．さて

$$\tilde{a}_{j+1}^{\dagger}\tilde{a}_{j}+h.c.=\frac{c_{2j+1}-ic_{2j+2}}{2}\frac{c_{2j-1}+ic_{2j}}{2}+h.c.=-\frac{i}{2}c_{2j}c_{2j+1}+\frac{i}{2}c_{2j-1}c_{2j+2}, \tag{9}$$

$$\tilde{a}_{j+1}^{\dagger}\tilde{a}_{j}^{\dagger}+h.c.=\frac{c_{2j+1}-ic_{2j+2}}{2}\frac{c_{2j-1}-ic_{2j}}{2}+h.c.=\frac{i}{2}c_{2j}c_{2j+1}+\frac{i}{2}c_{2j-1}c_{2j+2}, \tag{10}$$

$$\tilde{a}_{j}^{\dagger}\tilde{a}_{j}-\frac{1}{2}=\frac{c_{2j-1}-ic_{2j}}{2}\frac{c_{2j-1}+ic_{2j}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{i}{2}c_{2j-1}c_{2j}. \tag{11}$$

に注意するとハミルトニアンは

$$H=\sum_{j}\left[-t(-\frac{i}{2}c_{2j}c_{2j+1}+\frac{i}{2}c_{2j-1}c_{2j+2})-\mu(\frac{i}{2}c_{2j-1}c_{2j})+|\Delta|(\frac{i}{2}c_{2j}c_{2j+1}+\frac{i}{2}c_{2j-1}c_{2j+2})\right] \tag{12}$$

$$=\frac{i}{2}\sum_{j}\left[-\mu c_{2j-1}c_{2j}+(t+|\Delta|)c_{2j}c_{2j+1}+(-t+|\Delta|)c_{2j-1}c_{2j+2}\right]. \tag{13}$$

2　相関長ゼロにおける基底状態

以下，Kitaev鎖のハミルトニアンの

- $\mu=-1, t=|\Delta|=0,$
- $\mu=1, t=|\Delta|=0,$
- $\mu=0, t=|\Delta|=\frac{1}{2},$
- $\mu=0, t=-|\Delta|=-\frac{1}{2},$

における，PBC,APBCのそれぞれの境界条件における基底状態の，複素フェルミオンa_jの真空

$$a_j\left|0\right\rangle=0,\quad j=1,\dots,L \tag{14}$$

と$a_j^{\dagger}$によっての表示を求める．

2.1　$\mu=-1, t=|\Delta|=0$

ハミルトニアンは

$$H^{(1)}=\frac{i}{2}\sum_{j}c_{2j-1}c_{2j}=\sum_{j}(a_j^{\dagger}a_j-\frac{1}{2}). \tag{15}$$

境界条件に関わらず，基底状態は

$$\left|\Psi^{(1)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle=\left|0\right\rangle. \tag{16}$$

2.2 $\mu = 1, t = |\Delta| = 0$

ハミルトニアンは

$$H^{(2)} = -\frac{i}{2}\sum_j c_{2j-1}c_{2j} = -\sum_j (a_j^\dagger a_j - \frac{1}{2}). \tag{17}$$

境界条件に関わらず，基底状態は

$$|\Psi^{(2)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle = a_1^\dagger \cdots a_L^\dagger |0\rangle . \tag{18}$$

2.3 $\mu = 0, t = |\Delta| = \frac{1}{2}$

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H^{(3)} &= \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{L-1} c_{2j}c_{2j+1} + \eta\frac{i}{2}c_{2L}c_1 \qquad (19)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L-1}\left[-(a_{j+1}^\dagger a_j + h.c.) + e^{i\theta}(a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger + h.c.)\right] + \eta\frac{1}{2}\left[-(a_1^\dagger a_L + h.c.) + e^{i\theta}(a_1^\dagger a_L^\dagger + h.c.)\right]. \qquad (20) \end{aligned}$$

ここで，$\eta \in \pm 1$で境界条件を指定した．ボンドにおける複素フェルミオンを

$$\begin{aligned} \tilde{b}_j &= \frac{c_{2j} + ic_{2j+1}}{2} = \frac{i}{2}(-\tilde{a}_j + \tilde{a}_j^\dagger + \tilde{a}_{j+1} + \tilde{a}_{j+1}^\dagger), \qquad (21)\\ \tilde{b}_j^\dagger &= \frac{c_{2j} - ic_{2j+1}}{2} = -\frac{i}{2}(\tilde{a}_j - \tilde{a}_j^\dagger + \tilde{a}_{j+1}^\dagger + \tilde{a}_{j+1}), \qquad (22)\\ j &= 1, \ldots, L, \qquad (23) \end{aligned}$$

と導入すると，

$$c_{2j} = \tilde{b}_j + \tilde{b}_j^\dagger, \quad c_{2j+1} = -i(\tilde{b}_j - \tilde{b}_j^\dagger) \tag{24}$$

に注意して，ハミルトニアンは

$$H^{(3)} = \sum_{j=1}^{L-1}(\tilde{b}_j^\dagger \tilde{b}_j - \frac{1}{2}) + \eta(\tilde{b}_L^\dagger \tilde{b}_L - \frac{1}{2}) \tag{25}$$

となる．

境界条件に依存せず，基底状態は

$$\tilde{b}_j |\Psi^{(3)}\rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, L-1 \tag{26}$$

を見たす．これを満たす状態は2つ存在し，

$$|\pm\rangle = (1 \pm \tilde{a}_1^\dagger)\cdots(1 \pm \tilde{a}_L^\dagger)|0\rangle = \sum_{n=1}^{L}\sum_{j_1<\cdots<j_n}(\pm 1)^n \tilde{a}_{j_1}^\dagger \cdots \tilde{a}_{j_n}^\dagger |0\rangle \tag{27}$$

で与えられる．[2] 実際，

$$\begin{aligned} (-\tilde{a}_j + \tilde{a}_j^\dagger)|\pm\rangle &= (1 \mp \tilde{a}_1^\dagger)\cdots(1 \mp \tilde{a}_{j-1}^\dagger)(-\tilde{a}_j + \tilde{a}_j^\dagger)(1 \pm \tilde{a}_j^\dagger)\cdots(1 \pm \tilde{a}_L^\dagger)|0\rangle \qquad (28)\\ &= (1 \mp \tilde{a}_1^\dagger)\cdots(1 \mp \tilde{a}_{j-1}^\dagger)(-\tilde{a}_j \mp \tilde{a}_j\tilde{a}_j^\dagger + \tilde{a}_j^\dagger)(1 \pm \tilde{a}_{j+1}^\dagger)\cdots(1 \pm \tilde{a}_L^\dagger)|0\rangle \qquad (29)\\ &= (1 \mp \tilde{a}_1^\dagger)\cdots(1 \mp \tilde{a}_{j-1}^\dagger)(\mp 1 + \tilde{a}_j^\dagger)(1 \pm \tilde{a}_{j+1}^\dagger)\cdots(1 \pm \tilde{a}_L^\dagger)|0\rangle \qquad (30)\\ &= \mp(1 \mp \tilde{a}_1^\dagger)\cdots(1 \mp \tilde{a}_{j-1}^\dagger)(1 \mp \tilde{a}_j^\dagger)(1 \pm \tilde{a}_{j+1}^\dagger)\cdots(1 \pm \tilde{a}_L^\dagger)|0\rangle , \qquad (31) \end{aligned}$$

[2] Jordan=Wigner変換によりIsing模型に変換されるが，これはall upとall down状態.

$$(\tilde{a}_j+\tilde{a}_j^\dagger)\,|\pm\rangle = (1\mp\tilde{a}_1^\dagger)\cdots(1\mp\tilde{a}_{j-1}^\dagger)(\tilde{a}_j+\tilde{a}_j^\dagger)(1\pm\tilde{a}_j^\dagger)\cdots(1\pm\tilde{a}_L^\dagger)\,|0\rangle \tag{32}$$
$$= (1\mp\tilde{a}_1^\dagger)\cdots(1\mp\tilde{a}_{j-1}^\dagger)(\tilde{a}_j\pm\tilde{a}_j\tilde{a}_j^\dagger+\tilde{a}_j^\dagger)(1\pm\tilde{a}_{j+1}^\dagger)\cdots(1\pm\tilde{a}_L^\dagger)\,|0\rangle \tag{33}$$
$$= (1\mp\tilde{a}_1^\dagger)\cdots(1\mp\tilde{a}_{j-1}^\dagger)(\pm 1+\tilde{a}_j^\dagger)(1\pm\tilde{a}_{j+1}^\dagger)\cdots(1\pm\tilde{a}_L^\dagger)\,|0\rangle \tag{34}$$
$$= \pm(1\mp\tilde{a}_1^\dagger)\cdots(1\mp\tilde{a}_{j-1}^\dagger)(1\pm\tilde{a}_j^\dagger)(1\pm\tilde{a}_{j+1}^\dagger)\cdots(1\pm\tilde{a}_L^\dagger)\,|0\rangle\,, \tag{35}$$

に注意すると，

$$(-\tilde{a}_j^\dagger+\tilde{a}_j+\tilde{a}_{j+1}+\tilde{a}_{j+1}^\dagger)\,|\pm\rangle = 0, \quad j=1,\dots,L-1, \tag{36}$$

が従う．境界項は$|+\rangle\,,|-\rangle$の張る空間で閉じ，

$$\tilde{b}_L\,|\pm\rangle = \frac{i}{2}\{(-\tilde{a}_L+\tilde{a}_L^\dagger)+(\tilde{a}_1+\tilde{a}_1^\dagger)\}\,|\pm\rangle = \frac{i}{2}\{\mp|\mp\rangle\pm|\pm\rangle\} = \pm\frac{i}{2}(|\pm\rangle-|\mp\rangle), \tag{37}$$
$$\tilde{b}_L^\dagger\,|\pm\rangle = -\frac{i}{2}\{(\tilde{a}_L-\tilde{a}_L^\dagger)+(\tilde{a}_1+\tilde{a}_1^\dagger)\}\,|\pm\rangle = -\frac{i}{2}\{\pm|\mp\rangle\pm|\pm\rangle\} = \mp\frac{i}{2}(|\mp\rangle+|\pm\rangle) \tag{38}$$

に注意すると，

$$\tilde{b}_L^\dagger\tilde{b}_L\,|\pm\rangle = \pm\frac{i}{2}\tilde{b}_L^\dagger(|\pm\rangle-|\mp\rangle) = \pm\frac{i}{2}\{\mp\frac{i}{2}(|\mp\rangle+|\pm\rangle)\mp\frac{i}{2}(|\pm\rangle+|\mp\rangle)\} = \frac{1}{2}(|\pm\rangle+|\mp\rangle), \tag{39}$$

つまり，

$$\eta(\tilde{b}_L^\dagger\tilde{b}_L-\frac{1}{2})\,|\pm\rangle = \eta\frac{1}{2}\,|\mp\rangle\,. \tag{40}$$

したがって，$H^{(3)}$の基底状態はそれぞれ，規格化を除いて，

$$|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC}}\rangle \sim \frac{|+\rangle-|-\rangle}{2} = \sum_{n\in\mathrm{odd}}\sum_{j_1<\cdots<j_n}\tilde{a}_{j_1}^\dagger\cdots\tilde{a}_{j_n}^\dagger\,|0\rangle = \sum_{n\in\mathrm{odd}}\sum_{j_1<\cdots<j_n}e^{in\theta/2}a_{j_1}^\dagger\cdots a_{j_n}^\dagger\,|0\rangle\,, \tag{41}$$
$$|\Psi^{(3)}_{\mathrm{APBC}}\rangle \sim \frac{|+\rangle+|-\rangle}{2} = \sum_{n\in\mathrm{even}}\sum_{j_1<\cdots<j_n}\tilde{a}_{j_1}^\dagger\cdots\tilde{a}_{j_n}^\dagger\,|0\rangle = \sum_{n\in\mathrm{even}}\sum_{j_1<\cdots<j_n}e^{in\theta/2}a_{j_1}^\dagger\cdots a_{j_n}^\dagger\,|0\rangle\,, \tag{42}$$

となる．

2.4 $\mu=0, t=-|\Delta|=-\frac{1}{2}$

ハミルトニアンは

$$H^{(4)} = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{L-1}c_{2j-1}c_{2j+2}+\eta\frac{i}{2}c_{2L-1}c_2 \tag{43}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L-1}\left[(a_{j+1}^\dagger a_j+h.c.)+e^{i\theta}(a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger+h.c.)\right]+\eta\frac{1}{2}[(a_1^\dagger a_L+h.c.)+e^{i\theta}(a_1^\dagger a_L^\dagger+h.c.)]. \tag{44}$$

$H^{(4)}$は，$H^{(3)}$に対して奇数サイトのみフェルミオンパリティ変換とiの位相変換によって得られる．

$$U = \prod_{j=1}^{L} i^{a_j^\dagger a_j}(-1)^{j a_j^\dagger a_j}, \tag{45}$$

$$UH^{(3)}U^{-1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L-1}\left[(a_{j+1}^\dagger a_j+h.c.)+e^{i\theta}(a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger+h.c.)\right]+(-1)^L\eta\frac{1}{2}\left[(a_1^\dagger a_L+h.c.)+e^{i\theta}(a_1^\dagger a_L^\dagger+h.c.)\right]. \tag{46}$$

よって，$H^{(4)}$の基底状態は

$$|\Psi^{(4)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle = \begin{cases} U\,|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle & (L \in \mathrm{even}) \\ U\,|\Psi^{(3)}_{\mathrm{APBC/PBC}}\rangle & (L \in \mathrm{odd}) \end{cases} \tag{47}$$

$$\tag{48}$$

と与えられ，それぞれ

$$|\Psi^{(4)}_{\mathrm{PBC}}\rangle = \begin{cases} \sum_{n\in\mathrm{odd}}\sum_{j_1<\cdots<j_n}(-1)^{j_1+\cdots+j_n} i^n e^{in\theta/2}\tilde{a}^\dagger_{j_1}\cdots\tilde{a}^\dagger_{j_n}\,|0\rangle & (L\in\mathrm{even}) \\ \sum_{n\in\mathrm{even}}\sum_{j_1<\cdots<j_n}(-1)^{j_1+\cdots+j_n} i^n e^{in\theta/2}\tilde{a}^\dagger_{j_1}\cdots\tilde{a}^\dagger_{j_n}\,|0\rangle & (L\in\mathrm{odd}) \end{cases} \tag{49}$$

$$|\Psi^{(4)}_{\mathrm{APBC}}\rangle = \begin{cases} \sum_{n\in\mathrm{even}}\sum_{j_1<\cdots<j_n}(-1)^{j_1+\cdots+j_n} i^n e^{in\theta/2}\tilde{a}^\dagger_{j_1}\cdots\tilde{a}^\dagger_{j_n}\,|0\rangle & (L\in\mathrm{even}) \\ \sum_{n\in\mathrm{odd}}\sum_{j_1<\cdots<j_n}(-1)^{j_1+\cdots+j_n} i^n e^{in\theta/2}\tilde{a}^\dagger_{j_1}\cdots\tilde{a}^\dagger_{j_n}\,|0\rangle & (L\in\mathrm{odd}) \end{cases} \tag{50}$$

となる．[3]

2.5 フェルミオンパリティ，運動量

上で計算した基底状態に対してフェルミオンパリティは，

$$(-1)^F = \prod_{j=1}^{L}(-1)^{a_j^\dagger a_j} \tag{51}$$

として，

$$(-1)^F\,|\Psi^{(1)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle = |\Psi^{(1)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle\,, \tag{52}$$

$$(-1)^F\,|\Psi^{(2)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle = (-1)^L\,|\Psi^{(2)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle\,, \tag{53}$$

$$(-1)^F\,|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle = \mp\,|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle\,, \tag{54}$$

$$(-1)^F\,|\Psi^{(4)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle = \mp(-1)^L\,|\Psi^{(4)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle\,. \tag{55}$$

一方で，運動量はPBC，APBCにおける並進演算子をそれぞれ

$$T_{\mathrm{PBC}}a_j^\dagger T_{\mathrm{PBC}}^{-1} = a_{j+1}^\dagger,\quad T_{\mathrm{PBC}}a_L^\dagger T_{\mathrm{PBC}}^{-1} = a_1^\dagger,\quad T_{\mathrm{PBC}}\,|0\rangle = |0\rangle\,, \tag{56}$$

$$T_{\mathrm{APBC}}a_j^\dagger T_{\mathrm{APBC}}^{-1} = a_{j+1}^\dagger,\quad T_{\mathrm{APBC}}a_L^\dagger T_{\mathrm{APBC}}^{-1} = -a_1^\dagger,\quad T_{\mathrm{APBC}}\,|0\rangle = |0\rangle\,, \tag{57}$$

と定義すると，[4]

$$T_{\mathrm{PBC/APBC}}\,|\Psi^{(1)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle = |\Psi^{(1)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle\,, \tag{58}$$

$$T_{\mathrm{PBC/APBC}}\,|\Psi^{(2)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle = \pm(-1)^{L-1}\,|\Psi^{(2)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle\,. \tag{59}$$

[3] $(-1)^{j_1+\cdots j_n}$因子は，反強磁性Ising鎖の基底状態に対応する．

[4] $|\Psi^{(1)}\rangle, |\Psi^{(2)}\rangle$は境界条件に依らず$T_{\mathrm{PBC}}, T_{\mathrm{APBC}}$の両方の固有状態であるが，これは相関長ゼロの特殊性であって，一般のハミルトニアンに対してはPBC/APBCにおけるハミルトニアンは$T_{\mathrm{PBC}}/T_{\mathrm{APBC}}$に対してのみ不変.

$\mathbb{Z}_2$非自明状態については

$$T_{\mathrm{PBC}}\,|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC}}\rangle = T_{\mathrm{PBC}}\left[\sum_{n\in\mathrm{odd}}\sum_{j_1<\cdots<j_n<L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{j_1}\cdots a^\dagger_{j_n}|0\rangle + \sum_{n\in\mathrm{odd}}\sum_{j_1<\cdots<j_n=L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{j_1}\cdots a^\dagger_{L}|0\rangle\right] \tag{60}$$

$$= \sum_{n\in\mathrm{odd}}\sum_{j_1<\cdots<j_n<L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{j_1+1}\cdots a^\dagger_{j_n+1}|0\rangle + \sum_{n\in\mathrm{odd}}\sum_{j_1<\cdots<j_n=L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{j_1+1}\cdots a^\dagger_{1}|0\rangle \tag{61}$$

$$= \sum_{n\in\mathrm{odd}}\sum_{j_1<\cdots<j_n<L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{j_1+1}\cdots a^\dagger_{j_n+1}|0\rangle + \sum_{n\in\mathrm{odd}}\sum_{j_1<\cdots<j_n=L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{1}a^\dagger_{j_1+1}\cdots a^\dagger_{j_{n-1}}|0\rangle \tag{62}$$

$$= |\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC}}\rangle, \tag{63}$$

$$T_{\mathrm{APBC}}\,|\Psi^{(3)}_{\mathrm{APBC}}\rangle = T_{\mathrm{APBC}}\left[\sum_{n\in\mathrm{even}}\sum_{j_1<\cdots<j_n<L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{j_1}\cdots a^\dagger_{j_n}|0\rangle + \sum_{n\in\mathrm{even}}\sum_{j_1<\cdots<j_n=L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{j_1}\cdots a^\dagger_{L}|0\rangle\right] \tag{64}$$

$$= \sum_{n\in\mathrm{even}}\sum_{j_1<\cdots<j_n<L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{j_1+1}\cdots a^\dagger_{j_n+1}|0\rangle + \sum_{n\in\mathrm{even}}\sum_{j_1<\cdots<j_n=L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{j_1+1}\cdots(-a^\dagger_{1})|0\rangle \tag{65}$$

$$= \sum_{n\in\mathrm{even}}\sum_{j_1<\cdots<j_n<L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{j_1+1}\cdots a^\dagger_{j_n+1}|0\rangle + \sum_{n\in\mathrm{even}}\sum_{j_1<\cdots<j_n=L} e^{in\theta/2}a^\dagger_{1}a^\dagger_{j_1+1}\cdots a^\dagger_{j_{n-1}}|0\rangle \tag{66}$$

$$= |\Psi^{(3)}_{\mathrm{APBC}}\rangle, \tag{67}$$

よって，

$$T_{\mathrm{PBC/APBC}}\,|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle = |\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle. \tag{68}$$

$|\Psi^{(4)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\rangle$の運動量については並進と$U$の関係から計算しよう．

$$T_{\mathrm{PBC/APBC}}U = \Big(\prod_{j=1}^{L} i^{\hat{n}_{j+1}}(-1)^{j\hat{n}_{j+1}}\Big)T_{\mathrm{PBC/APBC}} \tag{69}$$

ここで，

$$\prod_{j=1}^{L}(-1)^{j\hat{n}_{j+1}} = \begin{cases} (-1)^{\hat{n}_2}(-1)^{\hat{n}_4}\cdots(-1)^{\hat{n}_L} & (L\in\mathrm{even}) \\ (-1)^{\hat{n}_2}(-1)^{\hat{n}_4}\cdots(-1)^{\hat{n}_{L-1}}(-1)^{\hat{n}_1} & (L\in\mathrm{odd}) \end{cases} \tag{70}$$

$$= \begin{cases} (\prod_{j=1}^{L}(-1)^{j\hat{n}_j})(-1)^F & (L\in\mathrm{even}) \\ (\prod_{j=1}^{L}(-1)^{j\hat{n}_j})(-1)^F(-1)^{\hat{n}_1} & (L\in\mathrm{odd}) \end{cases} \tag{71}$$

に注意すると，

$$T_{\mathrm{PBC/APBC}}U = \begin{cases} U(-1)^F T_{\mathrm{PBC/APBC}} & (L\in\mathrm{even}) \\ U(-1)^F(-1)^{\hat{n}_1}T_{\mathrm{PBC/APBC}} & (L\in\mathrm{odd}) \end{cases} \tag{72}$$

さらに

$$(-1)^{\hat{n}_1}T_{\mathrm{PBC/APBC}} = T_{\mathrm{APBC/PBC}} \tag{73}$$

に注意すると結局

$$T_{\mathrm{PBC/APBC}}U = U(-1)^F \begin{cases} T_{\mathrm{PBC/APBC}} & (L\in\mathrm{even}) \\ T_{\mathrm{APBC/PBC}} & (L\in\mathrm{odd}) \end{cases} \tag{74}$$

よって，

$$T_{\mathrm{PBC/APBC}} \left|\Psi^{(4)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle = \begin{cases} T_{\mathrm{PBC/APBC}} U \left|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle & (L \in \mathrm{even}) \\ T_{\mathrm{PBC/APBC}} U \left|\Psi^{(3)}_{\mathrm{APBC/PBC}}\right\rangle & (L \in \mathrm{odd}) \end{cases} \tag{75}$$

$$= \begin{cases} U(-1)^F T_{\mathrm{PBC/APBC}} \left|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle & (L \in \mathrm{even}) \\ U(-1)^F T_{\mathrm{APBC/PBC}} \left|\Psi^{(3)}_{\mathrm{APBC/PBC}}\right\rangle & (L \in \mathrm{odd}) \end{cases} \tag{76}$$

$$= \begin{cases} U(-1)^F \left|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle & (L \in \mathrm{even}) \\ U(-1)^F \left|\Psi^{(3)}_{\mathrm{APBC/PBC}}\right\rangle & (L \in \mathrm{odd}) \end{cases} \tag{77}$$

$$= \begin{cases} \mp U \left|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle & (L \in \mathrm{even}) \\ \pm U \left|\Psi^{(3)}_{\mathrm{APBC/PBC}}\right\rangle & (L \in \mathrm{odd}) \end{cases} \tag{78}$$

$$= \pm(-1)^{L-1} \left|\Psi^{(4)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle . \tag{79}$$

全てまとめると，

$$T_{\mathrm{PBC/APBC}} \left|\Psi^{(1)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle = \left|\Psi^{(1)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle , \tag{80}$$

$$T_{\mathrm{PBC/APBC}} \left|\Psi^{(2)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle = \pm(-1)^{L-1} \left|\Psi^{(2)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle , \tag{81}$$

$$T_{\mathrm{PBC/APBC}} \left|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle = \left|\Psi^{(3)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle , \tag{82}$$

$$T_{\mathrm{PBC/APBC}} \left|\Psi^{(4)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle = \pm(-1)^{L-1} \left|\Psi^{(4)}_{\mathrm{PBC/APBC}}\right\rangle . \tag{83}$$

References

[1] A. Y. Kitaev, Physics-Uspekhi **44**, 131 (2001).