超伝導ギャップ関数の既約分解

塩崎　謙

February 3, 2022

超伝導ギャップ関数の平均場の多体ハミルトニアンに注目する．

$$\hat{\Delta}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k},i,j} \psi_i^\dagger(\boldsymbol{k})\Delta_{ij}(\boldsymbol{k})\psi_j^\dagger(-\boldsymbol{k}) + h.c. \tag{1}$$

常伝導状態は以下の群Gのユニタリな対称性を持つとする．

$$\hat{g}\psi_i^\dagger(\boldsymbol{k})\hat{g}^{-1} = \psi_j^\dagger(p_g\boldsymbol{k})[u_g]_{ji}, \quad u_g u_h = z_{g,h}u_{gh}, \quad \hat{g}i\hat{g}^{-1} = i, \quad g,h \in G. \tag{2}$$

すると，

$$\begin{aligned}
\hat{g}\hat{\Delta}\hat{g}^{-1} &= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k},i,j} \psi_i^\dagger(p_g\boldsymbol{k})[u_g\Delta(\boldsymbol{k})u_g^T]_{ij}\psi_j^\dagger(-p_g\boldsymbol{k}) + h.c. && (3)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k},i,j} \psi_i^\dagger(\boldsymbol{k})[u_g\Delta(p_g^{-1}\boldsymbol{k})u_g^T]_{ij}\psi_j^\dagger(-\boldsymbol{k}) + h.c. && (4)
\end{aligned}$$

ここで，ギャップ関数$\Delta(\boldsymbol{k})$に対する群Gの左作用を

$$(D_g\Delta)(\boldsymbol{k}) := u_g\Delta(p_g^{-1}\boldsymbol{k})u_g^T \tag{5}$$

によって導入する．

$$\begin{aligned}
(D_g(D_h\Delta))(\boldsymbol{k}) &= u_g(D_h\Delta)(p_g^{-1}\boldsymbol{k})u_g^T && (6)\\
&= u_g u_h\Delta(p_h^{-1}p_g^{-1}\boldsymbol{k})u_h^T u_g^T && (7)\\
&= (z_{g,h})^2 u_{gh}\Delta(p_{gh}^{-1}\boldsymbol{k})u_{gh}^T && (8)\\
&= (z_{g,h})^2(D_{gh}\Delta)(\boldsymbol{k}) && (9)
\end{aligned}$$

より，乗数系が$(z_{g,h})^2 \equiv 1$を満たすならば，$D_gD_h = D_{gh}$を満たす．与えられた超伝導ギャップ関数の群Gの既約分解は，Gの既約表現αへの射影公式

$$P_\alpha = \frac{\dim\alpha}{|G|}\sum_{g\in G}(\chi_g^\alpha)^* D_g \tag{10}$$

を思い出すと，

$$\begin{aligned}
\Delta(\boldsymbol{k}) &= \sum_{\alpha\in\mathrm{irreps}} \Delta^{(\alpha)}(\boldsymbol{k}), && (11)\\
\Delta^{(\alpha)}(\boldsymbol{k}) &= \frac{\dim\alpha}{|G|}\sum_{g\in G}(\chi_g^\alpha)^*(D_g\Delta)(\boldsymbol{k}) && (12)
\end{aligned}$$

と実行されると考えられる．ここでχ_g^αは既約指標である．