c_1, w_2のゲージ不変性について

塩崎謙

November 16, 2024

1　第１Chern類

複素線束$L \to X$を考える．Good covering $\{U_i\}_i$に対して，U_i上の局所自明化をv_iとすると，U_{ij}上で変換関数

$$e^{i\phi_{ij}} = v_i^\dagger v_j \in U(1) \tag{1.1}$$

が定義される．リフト

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni \phi_{ij} \to \tilde{\phi}_{ij} \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

をひとつ取る．第1 Chern類は2コサイクル

$$(\delta\tilde{\phi})_{ijk} = \tilde{\phi}_{jk} - \tilde{\phi}_{ik} + \tilde{\phi}_{ij} \in Z^2(X, 2\pi\mathbb{Z}) \tag{1.3}$$

のコホモロジー類$c_1 = [\frac{1}{2\pi}\delta\tilde{\phi}] \in H^2(X, \mathbb{Z})$として定義される．リフトの取り替え

$$\tilde{\phi}_{ij} \mapsto \tilde{\phi}_{ij} + 2\pi m_{ij}, \quad m_{ij} \in \mathbb{Z} \tag{1.4}$$

に対してコホモロジー類c_1は不変であることに注意.

c_1のゲージ変換に対する不変性を確認する．ゲージ変換

$$v_i \mapsto v_i e^{i\chi_i} \tag{1.5}$$

に対して変換関数は

$$e^{i\phi_{ij}} \mapsto e^{i\phi'_{ij}} = e^{i(\phi_{ij} - \chi_i + \chi_j)} \tag{1.6}$$

と変化する． ϕ'_{ij}のリフト

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni \phi'_{ij} \to \tilde{\phi}'_{ij} \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

はϕ_{ij}のリフトとは独立に選ばれるが，関係式

$$e^{i\phi'_{ij}} = e^{i\phi_{ij}} e^{-i\chi_i} e^{i\chi_j} \tag{1.8}$$

より，ゲージ変換のリフトを

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni \chi_i \to \tilde{\chi}_i \in \mathbb{R} \tag{1.9}$$

とすると

$$\tilde{\phi}'_{ij} = \tilde{\phi}_{ij} - \tilde{\chi}_i + \tilde{\chi}_j + 2\pi n_{ij}, \quad n_{ij} \in \mathbb{Z} \tag{1.10}$$

なる関係がある．よって，

$$\delta\tilde{\phi}' = \delta\tilde{\phi} + 2\pi\delta n \tag{1.11}$$

となり，$\delta n \in B^2(X, \mathbb{Z})$であるからコホモロジー類$c_1$はゲージ不変.

2　第２Stiefel=Whitney類

c_1と同様．ランクrの実束$E \to X$を考える． Good covering $\{U_i\}_i$に対して，U_i上の局所自明化をv_iとすると，U_{ij}上で変換関数

$$g_{ij} = v_i^\dagger v_j \in O(r) \tag{2.1}$$

が定義される．リフト

$$O(r) \ni g_{ij} \to \tilde{g}_{ij} \in Pin_+(r) \tag{2.2}$$

をひとつ取る．第２SW類は２コサイクル

$$(\delta\tilde{g})_{ijk} = \tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{ki} \in \pm 1 \in Z^2(X, \mathbb{Z}_2) \tag{2.3}$$

のコホモロジー類$w_2 = [\delta g] \in H^2(X, \mathbb{Z}_2)$として定義される．リフトの取り替え

$$\tilde{g}_{ij} \mapsto \eta_{ij}\tilde{g}_{ij}, \quad \eta_{ij} \in \pm 1 \tag{2.4}$$

に対してコホモロジー類w_2は不変であることに注意.

　w_2のゲージ変換に対する不変性を確認する．ゲージ変換

$$v_i \mapsto v_i V_i, \quad V_i \in O(r) \tag{2.5}$$

に対して変換関数は

$$g_{ij} \mapsto g'_{ij} = V_i^\dagger g_{ij} V_j \tag{2.6}$$

と変化する． g'_{ij}のリフト

$$O(r) \ni g'_{ij} \to \tilde{g}'_{ij} \in Pin_+(r) \tag{2.7}$$

はg_{ij}のリフトとは独立に選ばれるが，関係式

$$g'_{ij} = V_i^\dagger g_{ij} V_j \tag{2.8}$$

より，ゲージ変換のリフトを

$$O(r) \ni V_i \to \tilde{V}_i \in Pin_+(r) \tag{2.9}$$

とすると

$$\tilde{g}'_{ij} = \tilde{V}_i^\dagger \tilde{g}_{ij} \tilde{V}_j \times \eta_{ij}, \quad \eta_{ij} \in \pm 1 \tag{2.10}$$

なる関係がある．よって，

$$\delta\tilde{g}' = \delta\tilde{g} \times \delta\eta \tag{2.11}$$

となり，$\delta\eta \in B^2(X, \mathbb{Z}_2)$であるからコホモロジー類$w_2$はゲージ不変.