3次元巻き付き数のゲージ化表式

Ken Shiozaki

December 26, 2024

1 ゲージ化

Mを閉じた向き付けのある3次元多様体として，マップ

$$g : M \to U(n) \tag{1}$$

を考える．巻き付き数は

$$\frac{1}{24\pi^2}\int_M \mathrm{tr}\,[g^{-1}dg]^3 \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

で与えられる．このトポロジカル作用を“ゲージ化”し，背景場を加えたときの振る舞いを調べる．“作用”

$$H = \frac{1}{12\pi}\mathrm{tr}\,[g^{-1}dg]^3 \tag{3}$$

は以下の大域的$U(n)_L \times U(n)_R/U(1)_{\mathrm{diag}}$対称性を持つ．

$$g \mapsto LgR^\dagger \quad L, R \in U(n). \tag{4}$$

1.1 局所表式

まずは$U(1)_{\mathrm{diag}}$は無視して$U(n)_L \times U(n)_R$対称性とみなしゲージ化しよう．ゲージ変換

$$g \mapsto g' = LgR^{-1}, \quad L, R \in U(n), \tag{5}$$

に対して外微分は

$$dg \mapsto d(LgR^{-1}) = L(dg + L^{-1}dLg - gR^{-1}dR)R^{-1} \tag{6}$$

と変化する． $U(n)_L \times U(n)_R$ゲージ場$A = (A_L, A_R)$を導入し，共変微分を

$$D_Ag = dg + A_Lg - gA_R \tag{7}$$

と定義する． D_Agが共変的

$$D_Ag \mapsto D_{A'}g' = LD_AgR^{-1} \tag{8}$$

に振る舞うためには，Aのゲージ変換を

$$A_L \mapsto A'_L = L(A_L + d)L^{-1} = LA_LL^{-1} + LdL^{-1}, \tag{9}$$
$$A_R \mapsto A'_R = R(A_R + d)R^{-1} = RA_RR^{-1} + RdR^{-1}, \tag{10}$$

と定義すれば良い．

$$g^{-1}D_Ag \mapsto R(g^{-1}D_Ag)R^{-1}, \tag{11}$$
$$gD_Ag^{-1} \mapsto L(gD_Ag^{-1})L^{-1} \tag{12}$$

に注意.

- 以下の意味でのゲージ不変性に注意.

$$\mathrm{tr}\,[g'^{-1}D_{A'}g']^3 = \mathrm{tr}\,[g^{-1}D_A g]^3. \tag{13}$$

計算する.

$$\mathrm{tr}\,[g^{-1}D_A g]^3 = \mathrm{tr}\,[g^{-1}dg + g^{-1}A_L g - A_R]^3 = \mathrm{tr}\,[A+B+C]^3 \tag{14}$$

と書いて,

$$= \mathrm{tr}\left[A^3 + B^3 + C^3 + 3(A^2B + A^2C + B^2C + B^2A + C^2A + C^2B) + 3ABC + 3ACB\right] \tag{15}$$

$$= \mathrm{tr}\left[(g^{-1}dg)^3 + A_L^3 - A_R^3\right] \tag{16}$$

$$+ 3\mathrm{tr}\left[d(dgg^{-1})A_L + d(g^{-1}dg)A_R - A_L^2 gA_R g^{-1} + A_R^2 g^{-1}A_L g + A_L^2 dgg^{-1} + A_R^2 g^{-1}dg + dg^{-1}A_L gA_R - dgA_R g^{-1}A_L\right] \tag{17}$$

$$= \mathrm{tr}\left[(g^{-1}dg)^3 + A_L^3 - A_R^3\right] + 3\mathrm{tr}\left[dgg^{-1}F_L + g^{-1}dgF_R - F_L gA_R g^{-1} + F_R g^{-1}A_L g\right] \tag{18}$$

$$+ 3d\mathrm{tr}\left[(dgg^{-1})A_L + (g^{-1}dg)A_R + A_L gA_R g^{-1}\right]. \tag{19}$$

ここで，ゲージ場A_L, A_Rの曲率

$$F_{L/R} = dA_{L/R} + A_{L/R}^2 \tag{20}$$

を導入した．ゲージ変換に対して，

$$F_L \mapsto LF_L L^{-1}, \tag{21}$$

$$F_R \mapsto RF_R R^{-1}, \tag{22}$$

と振る舞う．さらに整形して

$$\frac{1}{12\pi}\mathrm{tr}\,[g^{-1}D_A g]^3 = \frac{1}{12\pi}\mathrm{tr}\,[g^{-1}dg]^3 + \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\left[(g^{-1}D_{A_L}g)F_R - \frac{1}{3}A_R^3\right] - \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\left[(gD_{A_R}g^{-1})F_L - \frac{1}{3}A_L^3\right] \tag{23}$$

$$+ \frac{1}{4\pi}d\mathrm{tr}\left[(dgg^{-1})A_L + (g^{-1}dg)A_R + A_L gA_R g^{-1}\right] \tag{24}$$

を得る.

$$D_{A_{L/R}} = d + A_{L/R} \tag{25}$$

と書いた．さらにゲージ不変項

$$\mathrm{tr}\,[(g^{-1}D_A g)F_R - (gD_A g^{-1})F_L] \tag{26}$$

を取り出すと [1]，以下の表式を得る.

$$\frac{1}{12\pi}\mathrm{tr}\,[g^{-1}D_A g]^3 = \frac{1}{12\pi}\mathrm{tr}\,[g^{-1}dg]^3 + \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\left[(g^{-1}D_A g)F_R - (gD_A g^{-1})F_L\right] \tag{27}$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\left[A_R F_R - \frac{1}{3}A_R^3\right] - \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\left[A_L F_L - \frac{1}{3}A_L^3\right] \tag{28}$$

$$+ \frac{1}{4\pi}d\mathrm{tr}\left[(dgg^{-1})A_L - (dg^{-1}g)A_R + A_L gA_R g^{-1}\right]. \tag{29}$$

全微分項はパッチ変換において寄与が残ることに注意.

[1] 例えば，[1]にこの変形が書かれている.

1.1.1 CS項を用いた表式

Chern-Simons項

$$CS(A) = \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\,[AF - \frac{1}{3}A^3] \tag{30}$$

がゲージ変換

$$A \mapsto A' = v^{-1}(d+A)v \tag{31}$$

に対して

$$CS(A') = CS(A) - \frac{1}{4\pi}d\mathrm{tr}\left[dvv^{-1}A\right] - \frac{1}{12\pi}\mathrm{tr}\,[dvv^{-1}]^3 \tag{32}$$

と振る舞うことを思い出すと，以下のようにも書くこともできる．

$$\frac{1}{12\pi}\mathrm{tr}\,[g^{-1}D_A g]^3 = CS\big(g(A_R+d)g^{-1}\big) - CS\big(g^{-1}(A_L+d)g\big) - \frac{1}{12\pi}\mathrm{tr}\,[g^{-1}dg]^3 \tag{33}$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\left[(g^{-1}D_A g)F_R - (gD_A g^{-1})F_L\right] + \frac{1}{4\pi}d\mathrm{tr}\left[A_L g A_R g^{-1}\right]. \tag{34}$$

1.2 $/U(1)_{\mathrm{diag}}$について

保留

References

[1] Yuya Tanizaki, Tin Sulejmanpasic, *Anomaly and global inconsistency matching: θ-angles, $SU(3)/U(1)^2$ nonlinear sigma model, $SU(3)$ chains and its generalizations*, arXiv:1805.11423.