Stratonovich-Hubbard 変換

塩崎　謙

2013 年 5 月 17 日

目次

1 Gauss 積分 3
- 1.1 実 c 数（real boson） 3
- 1.2 複素 c 数（complex boson） 3
- 1.3 実グラスマン数（real (Majorana) fermion） 3
- 1.4 複素グラスマン数（complex fermion） 4

2 Stratonovich-Hubbard 変換 5
- 2.1 実ボソン 5
- 2.2 複素ボソン 5

3 Cooper channel 7
- 3.1 Cooper channel のハミルトニアン 7
  - 3.1.1 具体例：s 波 8
  - 3.1.2 具体例：^{3}He-B 10
- 3.2 Stratonovich-Hubbard 変換 14
- 3.3 Stratonovich-Hubbard 変換（運動量空間表示） 17
- 3.4 有効作用 21
  - 3.4.1 1 loop（Gauss ゆらぎ） 22
- 3.5 ギャップ方程式（平均場） 22
- 3.6 Ginzburg-Landau free energy 23
  - 3.6.1 s 波 26
- 3.7 Ginzburg-Landau（運動量空間表示） 28
- 3.8 Ginzburg-Landau 有効作用 29
  - 3.8.1 Ginzburg-Landau 有効作用（$T > T_c$） 30

4 Coulomb channel 31

4.1 Coulomb channel のハミルトニアン 31
4.1.1 具体例：等方的なハードコア斥力 32
4.1.2 具体例：接触型、CDW・SDW 33
4.2 Stratonovich-Hubbard 変換 34
4.3 クーロンガス 35

1 Gauss 積分

各種変数に対するガウス積分についてまとめておこう。

1.1 実 c 数（real boson）

$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)^T$ を実数のベクトル、$H = H^T$ を $n \times n$ 対称行列とする。また H は正定値だとする：$H > 0$ つまり H の固有値は全て正とする。この条件はガウス積分が収束するために必要な条件である。（そのため Stratonovich-Hubbard 変換を行う際に斥力か引力かで Stratonovich-Hubbard の方法が決まる。）

$$\int \prod_{i=1}^{n} \frac{d\phi_i}{\sqrt{2\pi}} \ \exp\left(-\frac{1}{2}\phi^T H \phi\right) = (\det H)^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

$J = (J_1, J_2, \dots, J_n)^T$ を複素 c 数のベクトルとする。

$$\int \prod_{i=1}^{n} \frac{d\phi_i}{\sqrt{2\pi}} \ \exp\left(-\frac{1}{2}\phi^T H \phi + J^T \phi\right) = (\det H)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} J^T H^{-1} J\right) \tag{2}$$

1.2 複素 c 数（complex boson）

$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)^T$ を複素 c 数のベクトル、$H = H^\dagger$ を $n \times n$ エルミト行列とする。また H は正定値だとする：$H > 0$ つまり H の固有値は全て正とする。

$$\int \prod_{i=1}^{n} \frac{d\phi_i^* d\phi_i}{2\pi i} \ \exp\left(-\phi^\dagger H \phi\right) = (\det H)^{-1} \tag{3}$$

ここで $\phi^\dagger = (\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_n^*)$ である。$J = (J_1, J_2, \dots, J_n)^T$ を (複素)c 数のベクトルとする。

$$\int \prod_{i=1}^{n} \frac{d\phi_i^* d\phi_i}{2\pi i} \ \exp\left(-\phi^\dagger H \phi + J^\dagger \phi + \phi^\dagger J\right) = (\det H)^{-1} \exp\left(J^\dagger H^{-1} J\right) \tag{4}$$

1.3 実グラスマン数（real (Majorana) fermion）

n を偶数、$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ を実グラスマン数のベクトル、$H = -H^T$ を $n \times n$ 反対称行列とする。c-数のガウス積分とは異なりグラスマン数の場合は H の正定値性は積分の収束に不必要である。[*1]

$$\int \prod_{i=1}^{n} d\gamma_i \ \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^T H \gamma\right) = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) H_{p(1)p(2)} H_{p(3)p(4)} \cdots H_{p(n-1)p(n)} = \mathrm{Pf}(H) \tag{5}$$

[*1] グラスマン数の微分・積分の定義については九後先生の教科書参照。

ここで $\prod_{i=1}^{n} d\gamma_i = d\gamma_1 d\gamma_2 \cdots d\gamma_n$ である。

$J = (J_1, J_2, \ldots, J_n)^T$ を (複素) グラスマン数のベクトルとする。

$$\int \prod_{i=1}^{n} d\gamma_i \ \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^T H\gamma + J^T\gamma\right) = \mathrm{Pf}(H)\exp\left(\frac{1}{2}J^T H^{-1} J\right) \tag{6}$$

さらに、次の場合を考えておく。$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ を実グラスマン数とし、H を $n \times n$ 行列とする。このとき

$$\int \prod_{i=1}^{n} d\xi_i d\eta_i \ \exp\left(-\xi^T H\eta\right) = \det H \tag{7}$$

$J = (J_1, J_2, \ldots, J_n)^T$ を (複素) グラスマン数のベクトルとする。

1.4 複素グラスマン数（complex fermion）

$\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)^T$ を "複素" グラスマン数（実グラスマン 2 個）のベクトルとし、その複素共役を $\psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*, \ldots, \psi_n^*)^T$ と書き、$H^\dagger = H$ を $n \times n$ エルミト行列とする。複素グラスマン数に対する積分の定義を

$$\int d\psi_i \psi_i = \int d\psi_i^* \psi_i^* = 1, \quad \text{他は } 0 \tag{8}$$

としておくと、

$$\psi_i = \xi_i + i\eta_i, \quad \psi_i^* = \xi_i - i\eta_i, \tag{9}$$

と実グラスマン数 ξ_i, η_i に分離した場合に、グラスマン数の測度の変換則 $d^n\gamma = \det A \ d^n(A\gamma)$ と矛盾しない。[*2]すると

$$\int \prod_{i=1}^{n} d\psi_i^* d\psi_i \ \exp\left(-\psi^\dagger H\psi\right) = \det H \tag{11}$$

ここで、複素フェルミオンの自由度は、状態 1 個に対し実グラスマン数 2 個であることに注意（複素グラスマン数 2 個ではない）。また $\det H = \det H^T$ より

$$\int \prod_{i=1}^{n} d\psi_i d\psi_i^* \ \exp\left(\psi^\dagger H\psi\right) = \det H \tag{12}$$

にも注意。$J = (J_1, J_2, \ldots, J_n)^T$ を (複素) グラスマン数のベクトルとすると

$$\int \prod_{i=1}^{n} d\psi_i^* d\psi_i \ \exp\left(-\psi^\dagger H\psi + J^\dagger\psi + \psi^\dagger J\right) = \det H \ \exp\left(J^\dagger H^{-1} J\right) \tag{13}$$

[*2] ちなみに

$$d\xi_i d\eta_i = -2i d\psi_i d\psi_i^* \tag{10}$$

となる。

2　Stratonovich-Hubbard 変換

2.1　実ボソン

$\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots)^T$ をグラスマン偶の場、V を対称行列とし V の固有値は全て正であるとする。

$$e^{-\rho^T V \rho} = e^{-\rho_i V_{ij} \rho_j} \tag{14}$$

の形の相互作用項に対し Stratonovich-Hubbard 変換を施す。

ϕ を実ボソン場、$A = A^T$ を対称行列とする。

$$\int \prod_{i=1}^{n} \frac{d\phi_i}{\sqrt{2\pi}} \ \exp\left(-\frac{1}{2}\phi^T A \phi\right) = (\det A)^{-\frac{1}{2}} \tag{15}$$

を用いる。定数項は測度にまとめて

$$\int D\phi \ e^{-\phi^T A \phi} = 1 \tag{16}$$

と書こう。すると

$$\begin{aligned} e^{-\rho^T V \rho} &= \int D\phi \ e^{-\frac{1}{4}\phi^T V^{-1}\phi} e^{-\rho^T V \rho} \\ &= \int D\phi \ \exp\left(-\frac{1}{4}\phi^T V^{-1}\phi - \rho^T V \rho\right) \\ &= \int D\phi \ \exp\left(-\frac{1}{4}(\phi + 2iV\rho)^T V^{-1}(\phi + 2iV\rho) - \rho^T V \rho\right) \\ &= \int D\phi \ \exp\left(-\frac{1}{4}\phi^T V^{-1}\phi - i\phi^T \rho\right) \end{aligned} \tag{17}$$

2.2　複素ボソン

$\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots)^T$ をグラスマン偶の場、V をエルミト行列とし V の固有値は全て正であるとする。

$$e^{\rho^\dagger V \rho} = \rho^{\rho_i^* V_{ij} \rho_j} \tag{18}$$

の形の相互作用項に対し Stratonovich-Hubbard 変換を施す。

ϕ を複素ボソン場、A をエルミト行列とする。

$$\int \prod_{i=1}^{n} \frac{d\phi_i^* d\phi_i}{2\pi i} \ \exp\left(-\phi^\dagger A \phi\right) = (\det A)^{-1} \tag{19}$$

を用いる。定数項は測度に組み込み

$$\int D\phi^* D\phi \ e^{-\phi^\dagger A \phi} = 1 \tag{20}$$

と書こう。すると

$$
\begin{aligned}
e^{\rho^\dagger V \rho} &= \int D\phi^* D\phi \ e^{-\phi^\dagger V^{-1}\phi} e^{\rho^\dagger V \rho} \\
&= \int D\phi^* D\phi \ \exp\left(-\phi^\dagger V^{-1}\phi + \rho^\dagger V \rho\right) \\
&= \int D\phi^* D\phi \ \exp\left(-(\phi + V\rho)^\dagger V^{-1}(\phi + V\rho) + \rho^\dagger V \rho\right) \\
&= \int D\phi^* D\phi \ \exp\left(-\phi^\dagger V^{-1}\phi - \phi^\dagger \rho - \rho^\dagger \phi\right)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

もしくは再スケールして

$$
e^{\rho^\dagger V \rho} = \int D\phi^* D\phi \ \exp\left(-\frac{1}{4}\phi^\dagger V^{-1}\phi - \frac{1}{2}\phi^\dagger \rho - \frac{1}{2}\rho^\dagger \phi\right) \tag{22}
$$

$$
e^{\frac{1}{2}\rho^\dagger V \rho} = \int D\phi^* D\phi \ \exp\left(-\frac{1}{2}\phi^\dagger V^{-1}\phi - \frac{1}{2}\phi^\dagger \rho - \frac{1}{2}\rho^\dagger \phi\right) \tag{23}
$$

$$
e^{\frac{1}{4}\rho^\dagger V \rho} = \int D\phi^* D\phi \ \exp\left(-\phi^\dagger V^{-1}\phi - \frac{1}{2}\phi^\dagger \rho - \frac{1}{2}\rho^\dagger \phi\right) \tag{24}
$$

3 Cooper channel

引力の Cooper channel に対して、Stratonovich-Hubbard 変換、ギャップ方程式、GL 有効作用についてまとめる。

3.1 Cooper channel のハミルトニアン

次の形の一般的な 2 体相互作用を考える：

$$\begin{aligned}H_{int} &= \sum_{[12][1'2']} V_{12,1'2'} c_1^\dagger c_2^\dagger c_{2'} c_{1'} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{121'2'} V_{12,1'2'} c_1^\dagger c_2^\dagger c_{2'} c_{1'}\end{aligned} \tag{25}$$

作用を

$$-S[c,c^*] = \int_0^\beta d\tau \left(\sum_{12} c_1^* \left(-\partial_\tau \delta_{12} - H_{12}\right) c_2 - \sum_{[12][1'2']} V_{12,1'2'} c_1^* c_2^* c_{2'} c_{1'} \right) \tag{26}$$

とする。虚時間の自由度 τ は必要があるまで特に明示しない。$V_{12,1'2'}$ は反対称化されているものとする：

$$V_{12,1'2'} = -V_{21,1'2'} = -V_{12,2'1'} \tag{27}$$

またエルミト性：

$$V_{12,1'2'} = V^*_{1'2',12} \tag{28}$$

も満たす。ここで大括弧 [12] は 12 に関する反対称性を表す。和 $\sum_{[12]}$ は反対称成分のみについての和を表す。常に

$$\sum_{[12]} f([12]) = \frac{1}{2} \sum_{12} f([12]) \tag{29}$$

が成立する。複素 c-数（ボソン）の補助場を導入して Stratonovich-Hubbard 変換する際に、ガウス積分の収束性より引力と斥力とでは Stratonovich-Hubbard 変換が異なる。つまり、ひとつの Stratonovich-Hubbard 変換で引力と斥力は同時にカバーできない。ここでは引力に対する Stratonovich-Hubbard 変換を考えたいので、予め扱う $V_{12,1'2'}$ を以下のように制限しておく。まず自由度 [12] は何らかの “基底”$\varphi_i([12])$ で展開できるものとする：

$$\begin{aligned}&f([12]) = \sum_i f_i \varphi_i([12]) \ , \\ &\sum_{[12]} \varphi_i^*([12]) \varphi_j([12]) \propto \delta_{ij} \\ &\varphi_i([21]) = -\varphi_i([12])\end{aligned} \tag{30}$$

ここで “基底”$\varphi_i([12])$ の直交性は仮定するが規格化可能性は仮定しない。すると $V_{[12],[1'2']}$ は

$$V_{[12],[1'2']} = \sum_{ij} V_{ij}\varphi_i([12])\varphi_j^*([1'2']) \tag{31}$$

と展開できる。$V_{12,1'2'}$ のエルミト性より V_{ij} はエルミト行列である。よって固有値は実数である。引力が存在するチャンネル（基底）にのみ Stratonovich-Hubbard 変換が適用できる（斥力には別の Stratonovich-Hubbard 変換を適用）ので、引力であるチャンネルを予め規定する。つまり自由度 [12] の部分空間 I が存在し、部分空間 I 内の行列 V_{ij} $(i,j\in I)$ の固有値は全て負（ゼロもダメ）であるとする。よって次の形の相互作用ハミルトニアンを考える：

$$H_{int} = \sum_{ij\in I} V_{ij}\left(\sum_{[12]}\varphi_i([12])c_1^\dagger c_2^\dagger\right)\left(\sum_{[1'2']}\varphi_j^*([1'2'])c_{2'}c_{1'}\right) \tag{32}$$

$$(\text{ただし } V_{ij} \text{の固有値は全て負})$$

以下、$V_{ij}\mapsto -V_{ij}$ と再定義しよう。結局、引力の Cooper チャンネルは一般的に次の表式となる：

$i\in I$ を引力のチャンネルのラベルとする。V_{ij} の固有値を全て正とする。

$$H_{int} = -\sum_{ij\in I} V_{ij}\left(\sum_{[12]}\varphi_i([12])c_1^\dagger c_2^\dagger\right)\left(\sum_{[1'2']}\varphi_j^*([1'2'])c_{2'}c_{1'}\right) \tag{33}$$

$$\begin{aligned}-S[c,c^*] = \int_0^\beta d\tau\Bigg\{&\sum_{12} c_1^*\left(-\partial_\tau\delta_{12}-H_{12}\right)c_2\\&+\sum_{ij\in I}V_{ij}\left(\sum_{[12]}\varphi_i([12])c_1^*c_2^*\right)\left(\sum_{[1'2']}\varphi_j^*([1'2'])c_{2'}c_{1'}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{34}$$

チャンネルの集合 I、及び、基底 $\varphi_i([12])$ については抽象的で分かりにくいのでいくつかの具体例で確認する。

3.1.1 具体例：s 波

contact 型の引力ハミルトニアン

$$\begin{aligned}H_{int} &= -U\int d^3\boldsymbol{x}\,\psi_\uparrow^\dagger(\boldsymbol{x})\psi_\downarrow^\dagger(\boldsymbol{x})\psi_\downarrow(\boldsymbol{x})\psi_\uparrow(\boldsymbol{x})\\&= -\frac{U}{V}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{q}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\uparrow}c^\dagger_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\downarrow}c_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\downarrow}c_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\uparrow}\end{aligned} \tag{35}$$

を考えよう。並進対称性によりペアの重心運動量 $\boldsymbol{q}$ は保存される。$\psi_\alpha(\boldsymbol{x})$ と $c_{\boldsymbol{k}\alpha}$ の基底の変換は

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}\alpha}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\\ c_{\boldsymbol{k}\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{V}}\int d^3\boldsymbol{x}\,\psi_\alpha(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\end{aligned} \tag{36}$$

である。変形して

$$
\begin{aligned}
H_{int} &= -\frac{U}{V}\sum_{\boldsymbol{q}}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\uparrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\downarrow} c_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\downarrow} c_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\uparrow} \\
&= -\frac{U}{V}\sum_{\boldsymbol{q}}\sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2} \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2} c^\dagger_{\boldsymbol{k}_1\uparrow} c^\dagger_{\boldsymbol{k}_2\downarrow} \sum_{\boldsymbol{k}'_1\boldsymbol{k}'_2} \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}'_1+\boldsymbol{k}'_2} c_{\boldsymbol{k}'_2\downarrow} c_{\boldsymbol{k}'_1\uparrow} \\
&= -\frac{U}{4V}\sum_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'}\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} \sum_{\boldsymbol{k}_1\alpha\boldsymbol{k}_2\beta} \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}(i\sigma_2)_{\alpha\beta} c^\dagger_{\boldsymbol{k}_1\alpha} c^\dagger_{\boldsymbol{k}_2\beta} \sum_{\boldsymbol{k}'_1\alpha'\boldsymbol{k}'_2\beta'} \delta_{\boldsymbol{q}',\boldsymbol{k}'_1+\boldsymbol{k}'_2}(i\sigma_2)_{\alpha'\beta'} c_{\boldsymbol{k}'_2\beta'} c_{\boldsymbol{k}'_1\alpha'} \\
&= -\frac{U}{V}\sum_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'}\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} \sum_{[(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]} \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}(i\sigma_2)_{\alpha\beta} c^\dagger_{\boldsymbol{k}_1\alpha} c^\dagger_{\boldsymbol{k}_2\beta} \sum_{[(\boldsymbol{k}'_1\alpha')(\boldsymbol{k}'_2\beta')]} \delta_{\boldsymbol{q}',\boldsymbol{k}'_1+\boldsymbol{k}'_2}(i\sigma_2)_{\alpha'\beta'} c_{\boldsymbol{k}'_2\beta'} c_{\boldsymbol{k}'_1\alpha'}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

と書けるからチャンネルのラベルはクーパーペアの重心運動量 $\boldsymbol{q}$ であり V_{ij} 及びチャンネルの基底 $\varphi_i([12])$ は

$$
H_{int} = -\frac{U}{4V}\sum_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}(i\sigma_2)_{\alpha\beta}(i\sigma_2)_{\alpha'\beta'} c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha} c^\dagger_{\boldsymbol{k}-\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta} c_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta'} c_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha'} \tag{38}
$$

$$
i \mapsto \boldsymbol{q} \tag{39}
$$

$$
V_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} = \frac{U}{V}\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} \tag{40}
$$

$$
\varphi_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) = \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}(i\sigma_2)_{\alpha\beta} \tag{41}
$$

となる。反対称性

$$
\varphi_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) = -\varphi_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_2\beta)(\boldsymbol{k}_1\alpha)]) \tag{42}
$$

に注意。

注意として、基底 $\varphi_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)])$ は規格化が出来ない：

$$
\begin{aligned}
\sum_{[(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]} \varphi^*_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)])\varphi_{\boldsymbol{q}'}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) &= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}_1\alpha\boldsymbol{k}_2\beta}\delta_{\boldsymbol{q}',\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}(i\sigma_2)_{\alpha\beta}\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}(i\sigma_2)_{\alpha\beta} \\
&= \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}'}\sum_{\boldsymbol{k}_1}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

$\varphi_i([12])$ の規格化可能性を仮定しなかったのはこのためである。

また、引力のチャンネルにペアの重心運動量 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ しか存在しない場合は、対応する補助場の自由度は虚時間方向のみ：$\phi(\tau)$ であり、超伝導の空間方向のゆらぎが存在できない。

3.1.2 具体例：^{3}He-B

contact 型の ^{3}He-B 相を誘起するのチャンネル

$$H_{int} = -\frac{U}{4V}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{q}}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}\left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{k}'}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'}c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha}c^\dagger_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta}c_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta'}c_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha'} \tag{44}$$

を考える。V_{ij} 及び φ_i([12]) は

$$\begin{aligned}
H_{int} &= -\frac{U}{4V}\sum_{\boldsymbol{q}}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha}c^\dagger_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta}\sum_{\boldsymbol{k}'}\left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{k}'}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'}c_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta'}c_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha'} \\
&= -\frac{U}{4V}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[\sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}\left(\frac{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2}{2k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}c^\dagger_{\boldsymbol{k}_1\alpha}c^\dagger_{\boldsymbol{k}_2\beta}\right] \\
&\qquad\left[\sum_{\boldsymbol{k}'_1\boldsymbol{k}'_2}\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}'_1+\boldsymbol{k}'_2}\left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{k}'_1-\boldsymbol{k}'_2}{2k_F}\right)_{\alpha'\beta'}c_{\boldsymbol{k}'_2\beta'}c_{\boldsymbol{k}'_1\alpha'}\right] \\
&= -\frac{U}{4V}\sum_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'}\left[\sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}\left(\frac{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2}{2k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}c^\dagger_{\boldsymbol{k}_1\alpha}c^\dagger_{\boldsymbol{k}_2\beta}\right] \\
&\qquad\left[\sum_{\boldsymbol{k}'_1\boldsymbol{k}'_2}\delta_{\boldsymbol{q}',\boldsymbol{k}'_1+\boldsymbol{k}'_2}\left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{k}'_1-\boldsymbol{k}'_2}{2k_F}\right)_{\alpha'\beta'}c_{\boldsymbol{k}'_2\beta'}c_{\boldsymbol{k}'_1\alpha'}\right]
\end{aligned} \tag{45}$$

より

$$H_{int} = -\frac{U}{4V}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{q}}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}\left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{k}'}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'}c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha}c^\dagger_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta}c_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta'}c_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha'} \tag{46}$$

$$i \mapsto \boldsymbol{q} \tag{47}$$

$$V_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} = \frac{U}{V}\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} \tag{48}$$

$$\varphi_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) = \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}\left(\frac{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2}{2k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta} \tag{49}$$

$$\varphi^*_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) = \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}\left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2}{2k_F}\right)_{\alpha\beta} \tag{50}$$

である。反対称性

$$\varphi_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) = -\varphi_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_2\beta)(\boldsymbol{k}_1\alpha)]) \tag{51}$$

に注意。

ついでにハミルトニアンの実空間表示を考える。接触型でなく

$$H_{int}=-\frac{1}{4V}\sum_{\boldsymbol{q}}v(\boldsymbol{q})\sum_{\boldsymbol{k}}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha}c^\dagger_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta}\sum_{\boldsymbol{k}'}\left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{k}'}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'}c_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta'}c_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha'} \tag{52}$$

とする。

$$\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{k}}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha}c^\dagger_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta}\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{V}}\int d\boldsymbol{x}\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{x})e^{i\left(\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\cdot\boldsymbol{x}}\frac{1}{\sqrt{V}}\int d\boldsymbol{x}'\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x}')e^{i\left(-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\cdot\boldsymbol{x}'}\\
&=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\frac{k_i}{k_F}\left(\sigma_i i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{x})\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x}')e^{i\boldsymbol{q}\cdot\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'}{2}}\\
&=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\int d\boldsymbol{R}\int d\boldsymbol{r}\frac{k_i}{k_F}\left(\sigma_i i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}/2)\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}/2)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}\\
&=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\int d\boldsymbol{R}\int d\boldsymbol{r}\left(\frac{-i\partial_{r_i}}{k_F}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\left(\sigma_i i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}/2)\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}/2)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}\\
&=\int d\boldsymbol{R}\int d\boldsymbol{r}\left(\frac{-i\partial_{r_i}}{k_F}\delta(\boldsymbol{r})\right)\left(\sigma_i i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}/2)\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}/2)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}\\
&=\int d\boldsymbol{R}\int d\boldsymbol{r}\delta(\boldsymbol{r})\left(\sigma_i i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}\left(\frac{i\partial_{r_i}}{k_F}\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}/2)\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}/2)+\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}/2)\frac{i\partial_{r_i}}{k_F}\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}/2)\right)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}\\
&=\int d\boldsymbol{x}\left(\sigma_i i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}\left(\frac{i\partial_i}{2k_F}\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{x})\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x})-\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{x})\frac{i\partial_i}{2k_F}\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x})\right)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\\
&=\int d\boldsymbol{x}\left(\sigma_i i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}\left(\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{x})\frac{-i\overleftrightarrow{\partial_i}}{k_F}\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x})\right)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\\
&=\int d\boldsymbol{x}\left[\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{x})\left(\frac{-i\overleftrightarrow{\partial_i}}{k_F}\left(\sigma_i i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}\right)\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x})\right]e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\\
&=\int d\boldsymbol{x}\left[\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{x})\left(\frac{-i\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta}\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x})\right]e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}
\end{aligned} \tag{53}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{k}'}\left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{k}'}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'} c_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta'}c_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha'}\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}'}\left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{k}'}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'}\frac{1}{\sqrt{V}}\int d\boldsymbol{x}'\psi_{\beta'}(\boldsymbol{x}')e^{-i\left(-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\cdot\boldsymbol{x}'}\frac{1}{\sqrt{V}}\int d\boldsymbol{x}\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{x})e^{-i\left(\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\cdot\boldsymbol{x}}\\
&=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}'}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\frac{k'_i}{k_F}\left(-i\sigma_2\sigma_i\right)_{\alpha'\beta'}e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\psi_{\beta'}(\boldsymbol{x}')\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'}{2}}\\
&=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}'}\int d\boldsymbol{R}\int d\boldsymbol{r}\frac{k'_i}{k_F}\left(-i\sigma_2\sigma_i\right)_{\alpha'\beta'}e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}\psi_{\beta'}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}/2)\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}/2)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}\\
&=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\int d\boldsymbol{R}\int d\boldsymbol{r}\left(\frac{i\partial_{r_i}}{k_F}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\left(-i\sigma_2\sigma_i\right)_{\alpha'\beta'}\psi_{\beta'}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}/2)\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}/2)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}\\
&=\int d\boldsymbol{R}\int d\boldsymbol{r}\left(\frac{i\partial_{r_i}}{k_F}\delta(\boldsymbol{r})\right)\left(-i\sigma_2\sigma_i\right)_{\alpha'\beta'}\psi_{\beta'}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}/2)\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}/2)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}\\
&=\int d\boldsymbol{R}\int d\boldsymbol{r}\delta(\boldsymbol{r})\left(-i\sigma_2\sigma_i\right)_{\alpha'\beta'}\\
&\qquad\left(\frac{-i\partial_{r_i}}{k_F}\psi_{\beta'}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}/2)\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}/2)+\psi_{\beta'}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}/2)\frac{-i\partial_{r_i}}{k_F}\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}/2)\right)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}\\
&=\int d\boldsymbol{x}\left(-i\sigma_2\sigma_i\right)_{\alpha'\beta'}\left(\frac{i\partial_i}{2k_F}\psi_{\beta'}(\boldsymbol{x})\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{x})-\psi_{\beta'}(\boldsymbol{x})\frac{i\partial_i}{2k_F}\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\right)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\\
&=\int d\boldsymbol{x}\left(-i\sigma_2\sigma_i\right)_{\alpha'\beta'}\left(\psi_{\beta'}(\boldsymbol{x})\frac{-i\overleftrightarrow{\partial_i}}{k_F}\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\right)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\\
&=\int d\boldsymbol{x}\left[\psi_{\beta'}(\boldsymbol{x})\left(\frac{-i\overleftrightarrow{\partial_i}}{k_F}\left(-i\sigma_2\sigma_i\right)_{\alpha'\beta'}\right)\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\right]e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\\
&=\int d\boldsymbol{x}\left[\psi_{\beta'}(\boldsymbol{x})\left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{-i\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'}\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\right]e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

と変形できる。ここで

$$
f(\boldsymbol{x})\left(-i\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\right)g(\boldsymbol{x})=\frac{i\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})i\boldsymbol{\nabla}g(\boldsymbol{x})}{2}
\tag{55}
$$

とした。すると

$$
\begin{aligned}
&H_{int}\\
&= -\frac{1}{4}\sum_{\boldsymbol{q}} v(\boldsymbol{q}) \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\frac{\boldsymbol{k}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma} i\sigma_2\right)_{\alpha\beta} c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha} c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta} \sum_{\boldsymbol{k}'} \left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{k}'}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'} c_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta'} c_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha'}\\
&= -\frac{1}{4}\sum_{\boldsymbol{q}} v(\boldsymbol{q})\\
&\qquad \int d\boldsymbol{x} \left[\psi^{\dagger}_{\alpha}(\boldsymbol{x}) \left(\frac{-i\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma} i\sigma_2\right)_{\alpha\beta} \psi^{\dagger}_{\beta}(\boldsymbol{x})\right] e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \int d\boldsymbol{y} \left[\psi_{\beta'}(\boldsymbol{y}) \left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{-i\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'} \psi_{\alpha'}(\boldsymbol{y})\right] e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}\\
&= -\frac{1}{4}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{y}\sum_{\boldsymbol{q}} v(\boldsymbol{q}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\\
&\qquad \left[\psi^{\dagger}_{\alpha}(\boldsymbol{x}) \left(\frac{-i\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma} i\sigma_2\right)_{\alpha\beta} \psi^{\dagger}_{\beta}(\boldsymbol{x})\right] \left[\psi_{\beta'}(\boldsymbol{y}) \left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{-i\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'} \psi_{\alpha'}(\boldsymbol{y})\right]\\
&= -\frac{1}{4}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{y}\; v(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \left[\psi^{\dagger}_{\alpha}(\boldsymbol{x}) \left(\frac{-i\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma} i\sigma_2\right)_{\alpha\beta} \psi^{\dagger}_{\beta}(\boldsymbol{x})\right] \left[\psi_{\beta'}(\boldsymbol{y}) \left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{-i\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'} \psi_{\alpha'}(\boldsymbol{y})\right]
\end{aligned} \tag{56}
$$

ここで

$$
v(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{q}} v(\boldsymbol{q}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \tag{57}
$$

である。特に $v(\boldsymbol{q}) = U/V$ のときは

$$
\begin{aligned}
&H_{int}\\
&= -\frac{U}{4V}\sum_{\boldsymbol{q}}\sum_{\boldsymbol{k}} \left(\frac{\boldsymbol{k}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma} i\sigma_2\right)_{\alpha\beta} c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha} c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta} \sum_{\boldsymbol{k}'} \left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{k}'}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'} c_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta'} c_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha'}\\
&= -\frac{U}{4}\int d\boldsymbol{x} \left[\psi^{\dagger}_{\alpha}(\boldsymbol{x}) \left(\frac{-i\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}{k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma} i\sigma_2\right)_{\alpha\beta} \psi^{\dagger}_{\beta}(\boldsymbol{x})\right] \left[\psi_{\beta'}(\boldsymbol{x}) \left(-i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{-i\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}{k_F}\right)_{\alpha'\beta'} \psi_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\right]
\end{aligned} \tag{58}
$$

3.2 Stratonovich-Hubbard 変換

複素ボソン場の補助場 $\phi_i(\tau)$ $(i \in I)$ を導入する。基底の添字 $i \in I$ が補助場の自由度となる。Stratonovich-Hubbard 変換は次のように実行出来る：

$$
\begin{aligned}
&e^{-S_{int}} \\
&= \exp\left(\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} V_{ij} \left(\sum_{[12]} \varphi_i([12]) c_1^* c_2^*\right)\left(\sum_{[1'2']} \varphi_j^*([1'2']) c_{2'} c_{1'}\right)\right) \\
&= \int D\phi^* D\phi \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \phi_i^* V_{ij} \phi_j + \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} V_{ij} \left(\sum_{[12]} \varphi_i([12]) c_1^* c_2^*\right)\left(\sum_{[1'2']} \varphi_j^*([1'2']) c_{2'} c_{1'}\right)\right) \\
&= \int D\phi^* D\phi \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \left(\phi_i^* + \sum_{[12]} \varphi_i([12]) c_1^* c_2^*\right) V_{ij} \left(\phi_j + \sum_{[1'2']} \varphi_j^*([1'2']) c_{2'} c_{1'}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} V_{ij} \left(\sum_{[12]} \varphi_i([12]) c_1^* c_2^*\right)\left(\sum_{[1'2']} \varphi_j^*([1'2']) c_{2'} c_{1'}\right)\right\} \\
&= \int D\phi^* D\phi \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \phi_i^* V_{ij} \phi_j\right. \\
&\qquad \left. -\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \phi_i^* V_{ij} \sum_{[1'2']} \varphi_j^*([1'2']) c_{2'} c_{1'} - \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \sum_{[12]} \varphi_i([12]) c_1^* c_2^* V_{ij} \phi_j\right)
\end{aligned} \tag{59}
$$

ここで積分 $\int D\phi^* D\phi = \int D\phi_i^* D\phi_i$ は [12] の自由度について取るのではなく、$i \in I$ についてのみ取る。ギャップ関数 $\Delta_i(\tau)$ $(i \in I)$ を

$$
\Delta_i = \sum_{j\in I} V_{ij} \phi_j \tag{60}
$$

で定義する。複素共役は V_{ij} のエルミト性 $V_{ij} = V_{ji}^*$ より

$$
\Delta_j^* = \sum_{i\in I} \phi_i^* V_{ij} \tag{61}
$$

となる。すると

$$
\begin{aligned}
e^{-S_{int}} &= \int D\phi^* D\phi \exp\Bigg(- \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \phi_i^* V_{ij} \phi_j \\
&\qquad - \int_0^\beta d\tau \sum_{j\in I} \Delta_j^* \sum_{[1'2']} \varphi_j^*([1'2']) c_{2'} c_{1'} - \int_0^\beta d\tau \sum_{i\in I} \sum_{[12]} \varphi_i([12]) c_1^* c_2^* \Delta_i \Bigg) \\
&= \int D\phi^* D\phi \exp\Bigg(- \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \phi_i^* V_{ij} \phi_j \\
&\qquad - \int_0^\beta d\tau \sum_{[12]} \sum_{i\in I} \Delta_i^* \varphi_i^*([21]) c_1 c_2 - \int_0^\beta d\tau \sum_{[12]} \sum_{i\in I} \Delta_i \varphi_i([12]) c_1^* c_2^* \Bigg)
\end{aligned}
\tag{62}
$$

分配関数は

$$
\begin{aligned}
Z &= \int Dc^* Dc \; e^{-S[c]} \\
&= \int Dc^* Dc D\phi^* D\phi \exp\Bigg(\int_0^\beta d\tau \sum_{12} c_1^* \left(-\partial_\tau \delta_{12} - H_{12} \right) c_2 - \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \phi_i^* V_{ij} \phi_j \\
&\qquad - \int_0^\beta d\tau \sum_{[12]} \sum_{i\in I} \Delta_i^* \varphi_i^*([21]) c_1 c_2 - \int_0^\beta d\tau \sum_{[12]} \sum_{i\in I} \Delta_i \varphi_i([12]) c_1^* c_2^* \Bigg) \\
&= \int Dc^* Dc D\phi^* D\phi \\
&\quad \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \sum_{12} (c_1^*, c_1) \begin{pmatrix} -\partial_\tau \delta_{12} - H_{12} & -\sum_{i\in I} \Delta_i \varphi_i([12]) \\ -\sum_{i\in I} \Delta_i^* \varphi_i^*([21]) & -\partial_\tau \delta_{12} + H_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2^* \end{pmatrix} - \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \phi_i^* V_{ij} \phi_j \right) \\
&= \int Dc^* Dc D\phi^* D\phi \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \sum_{12} \Psi_1^\dagger G_{12}^{-1} \Psi_2 - \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \phi_i^* V_{ij} \phi_j \right) \\
&= \int D\phi^* D\phi \exp\left(\frac{1}{2} \mathrm{Tr} \ln \left[\frac{1}{2} G_{12}^{-1} \right] - \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \phi_i^* V_{ij} \phi_j \right)
\end{aligned}
\tag{63}
$$

ここで南部表示

$$
\Psi_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^* \end{pmatrix} \;, \quad \Psi_1^* = \begin{pmatrix} c_1^* \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \left(\Psi_1^\dagger = (c_1^*, c_1) \right) \tag{64}
$$

を導入した。(この選び方は実空間表示では conventional だが運動量空間表示では unconventional) また

$$
G_{12}^{-1}(\tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} -\partial_\tau \delta_{12} - H_{12} & -\sum_{i\in I} \Delta_i \varphi_i([12]) \\ -\sum_{i\in I} \Delta_i^* \varphi_i^*([21]) & -\partial_\tau \delta_{12} + H_{21} \end{pmatrix} \delta(\tau_1 - \tau_2) \tag{65}
$$

である。また、$\mathrm{Tr}\ln$ の前の係数 $\frac{1}{2}$ は南部スピノルの"マヨラナ"性：

$$\Psi_1^* = \tau_1 \Psi_1 \tag{66}$$

より。

さて V_{ij} の固有値は全て正と仮定した。特に V_{ij} 特異ではないから逆行列が取れる。そこで、補助場を ϕ でなく Δ で作用を書き換えよう。$\phi \mapsto \Delta = V\phi$ の測度の変化（Jacobian）は定数なので測度 $D\Delta^* D\Delta$ に組み込む。また $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[\frac{1}{2}\right]$ は定数なので落とす。結局分配関数は

$$\begin{aligned}
Z &= \int D\Delta_i^* D\Delta_i \; e^{-\tilde{S}[\Delta_i]} \\
&= \int D\Delta_i^* D\Delta_i \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[G^{-1}[\Delta_i]\right] - \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \Delta_i^* V_{ij}^{-1} \Delta_j\right)
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\tilde{S}[\Delta_i] = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[G^{-1}[\Delta_i]\right] + \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \Delta_i^* V_{ij}^{-1} \Delta_j \tag{68}$$

$$\left[G^{-1}[\Delta_i]\right]_{12}(\tau_1,\tau_2) = \begin{pmatrix} -\partial_{\tau_1}\delta_{12} - H_{12} & -\Delta_{[12]} \\ -\Delta_{[21]}^* & -\partial_{\tau_1}\delta_{12} + H_{21} \end{pmatrix} \delta(\tau_1 - \tau_2) \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{[12]} &= \sum_{i\in I} \Delta_i \varphi_i([12]), \\
\Delta_{[21]}^* &= \sum_{i\in I} \Delta_i^* \varphi_i^*([21]),
\end{aligned} \tag{70}$$

と書ける。

3.3 Stratonovich-Hubbard 変換（運動量空間表示）

前節の Stratonovich-Hubbard 変換は実空間表示に対しては適した定義だが運動量空間表示に対しては、通常、南部表示を空間的に局所的に定義するため、南部表示の定義を変更した方が一般的。

分配関数の表式：

$$
\begin{aligned}
Z &= \int Dc^* Dc\ e^{-S[c]} \\
&= \int Dc^* Dc D\phi^* D\phi \exp\left(\int_0^\beta d\tau \sum_{12} c_1^* \left(-\partial_\tau \delta_{12} - H_{12}\right) c_2 - \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \phi_i^* V_{ij} \phi_j \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^\beta d\tau \sum_{[12]} \sum_{i\in I} \Delta_i^* \varphi_i^*([21]) c_1 c_2 - \int_0^\beta d\tau \sum_{[12]} \sum_{i\in I} \Delta_i \varphi_i([12]) c_1^* c_2^* \right)
\end{aligned} \tag{71}
$$

までは共通。ここで具体的な表示：

$$
1 = (\boldsymbol{k}_1 \alpha), \quad 2 = (\boldsymbol{k}_2 \beta) \tag{72}
$$

に移る。すると

$$
\begin{aligned}
Z =& \int Dc^* Dc D\phi^* D\phi \\
&\exp\left(\int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\alpha\beta} c^*_{\boldsymbol{k}_1\alpha}(\tau)\left(-\partial_\tau \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\right) c_{\boldsymbol{k}_2\beta}(\tau) - \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I}\phi_i^*(\tau)V_{ij}\phi_j(\tau)\right. \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\alpha\beta}\sum_{i\in I}\Delta_i^*(\tau)\varphi_i^*([(\boldsymbol{k}_2\beta)(\boldsymbol{k}_1\alpha)])c_{\boldsymbol{k}_1\alpha}(\tau)c_{\boldsymbol{k}_2\beta}(\tau) \\
&\quad \left. -\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\alpha\beta}\sum_{i\in I}\Delta_i(\tau)\varphi_i([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)])c^*_{\boldsymbol{k}_1\alpha}(\tau)c^*_{\boldsymbol{k}_2\beta}(\tau)\right) \\
=& \int Dc^* Dc D\phi^* D\phi \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I}\phi_i^*(\tau)V_{ij}\phi_j(\tau)\right. \\
&+\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\alpha\beta} c^*_{\boldsymbol{k}_1\alpha}(\tau)\left(-\partial_\tau \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\right) c_{\boldsymbol{k}_2\beta}(\tau) \\
&+\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\alpha\beta} c_{-\boldsymbol{k}_1\alpha}(\tau)\left(-\partial_\tau \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\alpha\beta} + H_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{k}_2,-\boldsymbol{k}_1)\right) c^*_{-\boldsymbol{k}_2\beta}(\tau) \\
&-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\alpha\beta}\sum_{i\in I}\Delta_i^*(\tau)\varphi_i^*([(\boldsymbol{k}_2\beta)(-\boldsymbol{k}_1\alpha)])c_{-\boldsymbol{k}_1\alpha}(\tau)c_{\boldsymbol{k}_2\beta}(\tau) \\
&\left.-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\alpha\beta}\sum_{i\in I}\Delta_i(\tau)\varphi_i([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(-\boldsymbol{k}_2\beta)])c^*_{\boldsymbol{k}_1\alpha}(\tau)c^*_{-\boldsymbol{k}_2\beta}(\tau)\right)
\end{aligned} \tag{73}
$$

ここで南部表示

$$
\Psi_{\boldsymbol{k}\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}\alpha}(\tau) \\ c^*_{-\boldsymbol{k}\alpha}(\tau) \end{pmatrix} \quad , \quad \Psi^*_{\boldsymbol{k}\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} c^*_{\boldsymbol{k}\alpha}(\tau) \\ c_{-\boldsymbol{k}\alpha}(\tau) \end{pmatrix} \tag{74}
$$

を定義すると

$$
\begin{aligned}
Z = &\int Dc^* DcD\phi^* D\phi \exp\Bigg(-\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \phi_i^*(\tau) V_{ij} \phi_j(\tau) \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\alpha\beta} \\
&(c^*_{\boldsymbol{k}_1\alpha}, c_{-\boldsymbol{k}_1\alpha}) \begin{pmatrix} -\partial_\tau \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) & -\sum_{i\in I}\Delta_i(\tau)\varphi_i([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(-\boldsymbol{k}_2\beta)]) \\ -\sum_{i\in I}\Delta_i^*(\tau)\varphi_i^*([(\boldsymbol{k}_2\beta)(-\boldsymbol{k}_1\alpha)]) & -\partial_\tau \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\alpha\beta} + H_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{k}_2,-\boldsymbol{k}_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}_2\beta} \\ c^*_{-\boldsymbol{k}_2\beta} \end{pmatrix} \Bigg) \\
= &\int Dc^* DcD\phi^* D\phi \exp\Bigg(-\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \Delta_i^*(\tau) V_{ij}^{-1} \Delta_j(\tau) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\alpha\beta} \Psi^\dagger_{\boldsymbol{k}_1\alpha}(\tau) G^{-1}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\tau;\Delta,\Delta^*) \Psi_{\boldsymbol{k}_2\beta}(\tau) \Bigg) \\
= &\int Dc^* DcD\phi^* D\phi \exp\Bigg(-\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \Delta_i^*(\tau) V_{ij}^{-1} \Delta_j(\tau) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\alpha\beta} \Psi^\dagger_{\boldsymbol{k}_1\alpha}(\tau_1) G^{-1}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1\tau_1,\boldsymbol{k}_2\tau_2;\Delta,\Delta^*) \Psi_{\boldsymbol{k}_2\beta}(\tau_2) \Bigg) \\
= &\int D\Delta^* D\Delta \exp\Bigg(-\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \Delta_i^*(\tau) V_{ij}^{-1} \Delta_j(\tau) + \frac{1}{2}\mathrm{TrLn}\ G^{-1}[\Delta,\Delta^*] \Bigg)
\end{aligned}
\tag{75}
$$

となる。$G^{-1}[\Delta,\Delta^*]$ は

$$
\begin{aligned}
&G^{-1}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1\tau_1,\boldsymbol{k}_2\tau_2;\Delta,\Delta^*) \\
&= \begin{pmatrix} -\partial_{\tau_1} \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) & -\sum_{i\in I}\Delta_i(\tau_1)\varphi_i([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(-\boldsymbol{k}_2\beta)]) \\ -\sum_{i\in I}\Delta_i^*(\tau_1)\varphi_i^*([(\boldsymbol{k}_2\beta)(-\boldsymbol{k}_1\alpha)]) & -\partial_{\tau_1} \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\alpha\beta} + H_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{k}_2,-\boldsymbol{k}_1) \end{pmatrix} \delta(\tau_1-\tau_2)
\end{aligned}
\tag{76}
$$

である。

　まとめ：

$$Z = \int D\Delta^* D\Delta e^{-\tilde{S}[\Delta,\Delta^*]}$$
$$= \int D\Delta^* D\Delta \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \Delta_i^*(\tau) V_{ij}^{-1} \Delta_j(\tau) + \frac{1}{2}\mathrm{TrLn}\ G^{-1}[\Delta,\Delta^*] \right) \tag{77}$$

$$\tilde{S}[\Delta,\Delta^*] = \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \Delta_i^*(\tau) V_{ij}^{-1} \Delta_j(\tau) - \frac{1}{2}\mathrm{TrLn}\ G^{-1}[\Delta,\Delta^*] \tag{78}$$

$$G_{\alpha\beta}^{-1}(\boldsymbol{k}_1\tau_1, \boldsymbol{k}_2\tau_2; \Delta, \Delta^*)$$
$$= \begin{pmatrix} -\partial_{\tau_1}\delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) & -\sum_{i\in I}\Delta_i(\tau_1)\varphi_i([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(-\boldsymbol{k}_2\beta)]) \\ -\sum_{i\in I}\Delta_i^*(\tau_1)\varphi_i^*([(\boldsymbol{k}_2\beta)(-\boldsymbol{k}_1\alpha)]) & -\partial_{\tau_1}\delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\alpha\beta} + H_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{k}_2,-\boldsymbol{k}_1) \end{pmatrix} \delta(\tau_1-\tau_2) \tag{79}$$

V_{ij} と $\varphi_i([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)])$ の具体例を付記する。

contact s 波：

$$V_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} = \frac{U}{V}\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} \quad (V \text{ は体積}) \tag{80}$$

$$\varphi_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) = \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}(i\sigma_2)_{\alpha\beta} \tag{81}$$

contact BW：

$$V_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} = \frac{U}{V}\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} \quad (V \text{ は体積}) \tag{82}$$

$$\varphi_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) = \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}\left(\frac{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2}{2k_F}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta} \tag{83}$$

もしくは

$$\varphi_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) = \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}\left(\frac{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2}{|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\sigma_2\right)_{\alpha\beta} \tag{84}$$

contact spin singlet (lm) 波：

$$V_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'}^{lm,l'm'} = \frac{U}{V}\delta_{lm,l'm'}\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} \quad (V \text{ は体積}) \tag{85}$$

$$\varphi_{\boldsymbol{q}}^{lm}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) = \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}Y_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2}{|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|}\right)(i\sigma_2)_{\alpha\beta} \quad (l\in even) \tag{86}$$

contact spin triplet (lm) 波：

$$V_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'}^{jlm,j'l'm'} = \frac{U}{V}\delta_{jj'}\delta_{lm,l'm'}\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} \quad (V \text{ は体積}) \tag{87}$$

$$\varphi_{\boldsymbol{q}}^{j,lm}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) = \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}Y_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2}{|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|}\right)(\sigma_j i\sigma_2)_{\alpha\beta} \quad (l\in odd) \tag{88}$$

3.4 有効作用

超伝導オーダーを抽出する複素なプローブ場 $J_i(\tau), J_i^*(\tau)$ を導入し、外場中の分配関数 $Z[J,J^*]$ を定義：

$$
\begin{aligned}
Z[J,J^*] &= e^{-W[J,J^*]} \\
&= \int D\Delta_i^* D\Delta_i\ e^{-\tilde{S}[\Delta,\Delta^*,J,J^*]} \\
&= \int D\Delta_i^* D\Delta_i \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[G^{-1}[\Delta_i]\right] - \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I}\Delta_i^* V_{ij}^{-1}\Delta_j - \int_0^\beta d\tau\sum_i\left(J_i^*\Delta_i + J_i\Delta_i^*\right)\right)
\end{aligned}
\tag{89}
$$

ここで $W[J,J^*]$ は連結 Green 関数の生成汎関数であり、外場中の自由エネルギーに対応する（$\beta F = W$）。J, J^* が与えられると外場中のオーダーパラメータの期待値が与えられる：

$$
\bar{\Delta}_i(\tau) = \langle\Delta_i(\tau)\rangle_{J,J^*} = -\frac{\delta W[J,J^*]}{\delta J_i^*(\tau)} = \frac{1}{Z[J,J^*]}\frac{\delta Z[J,J^*]}{\delta J_i^*(\tau)} \tag{90}
$$

これを逆解きしてオーダーパラメータ $\bar{\Delta}, \bar{\Delta}^*$ が与えられたとき J, J^* が決まると仮定する：

$$
\begin{aligned}
J &= J[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*], \\
J^* &= J^*[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*]
\end{aligned}
\tag{91}
$$

有効作用 $\Gamma[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*]$ は $W[J,J^*]$ の Legendre 変換として定義する：

$$
\Gamma[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*] := W\Big[J[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*], J^*[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*]\Big] + \int_0^\beta d\tau\sum_{i\in I}\left(\bar{\Delta}_i J_i^*[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*] + \bar{\Delta}_i^* J_i[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*]\right) \tag{92}
$$

$\Gamma[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*]$ は Gibbs 自由エネルギーに対応する（$\beta G_{Gibbs} = \Gamma$）。式 (90) に双対な関係式は

$$
J_i(\tau)[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*] = \frac{\delta\Gamma[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*]}{\delta\bar{\Delta}_i^*(\tau)} \tag{93}
$$

実際に実現される Δ の期待値は外場がゼロの場合である。よってギャップ方程式

$$
\frac{\delta\Gamma[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*]}{\delta\bar{\Delta}_i^*(\tau)} = 0 \tag{94}
$$

を得る。この方程式は U(1) 対称性を破っていないことに注意。

式 (94) は熱・量子ゆらぎを全て取り入れたギャップ方程式である。ϕ^4 のような自由場＋相互作用の作用の場合には tree レベルの有効作用はラグランジアンそのものである。いま Δ のラグランジアンは高次まで含めると非常に複雑であり、この場合も tree レベルの有効作用がラグランジアンに一致するかどうかについては僕は知らない。もし一致するなら（鞍点近似 $Z \sim e^{-\tilde{S}[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*]}$）

$$
\Gamma[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*] = \tilde{S}[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*] + O(\text{ゆらぎ}) \tag{95}
$$

となる。これから平均場のギャップ方程式

$$\frac{\delta\tilde{S}[\bar{\Delta},\bar{\Delta}^*]}{\delta\bar{\Delta}_i^*(\tau)}=0 \tag{96}$$

を得る。

3.4.1 1 loop（Gauss ゆらぎ）

3.5 ギャップ方程式（平均場）

$$\tilde{S}[\Delta,\Delta^*]=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[G^{-1}[\Delta,\Delta^*]\right]+\int_0^\beta d\tau\sum_{ij\in I}\Delta_i^*V_{ij}^{-1}\Delta_j \tag{97}$$

の鞍点方程式を導出しよう。ここでは S が 2 つの実関数 $\Delta_i(\tau),\Delta_i^*(\tau)$ の汎関数であることを明示している。$S[\Delta,\Delta^*]$ を $\Delta_i^*(\tau)$ で汎関数微分して

$$\frac{\delta S_{GL}[\Delta,\Delta^*]}{\delta\Delta_i^*(\tau)}=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[G[\Delta,\Delta^*]\frac{\delta G^{-1}[\Delta,\Delta^*]}{\delta\Delta_i^*(\tau)}\right]+V_{ij}^{-1}\Delta_j(\tau) \tag{98}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{\delta G^{-1}[\Delta,\Delta^*]}{\delta\Delta_i^*(\tau)}&=\frac{\delta}{\delta\Delta_i^*(\tau)}\begin{pmatrix}-\partial_{\tau_1}\delta_{12}-H_{12} & -\Delta_{[12]}(\tau_1)\\ -\Delta^*_{[21]}(\tau_1) & -\partial_{\tau_1}\delta_{12}+H_{21}\end{pmatrix}\delta(\tau_1-\tau_2)\\&=\frac{\delta}{\delta\Delta_i^*(\tau)}\begin{pmatrix}-\partial_{\tau_1}\delta_{12}-H_{12} & -\Delta_{[12]}(\tau_1)\\ \Delta^*_{[12]}(\tau_1) & -\partial_{\tau_1}\delta_{12}+H_{21}\end{pmatrix}\delta(\tau_1-\tau_2)\\&=\frac{\delta}{\delta\Delta_i^*(\tau)}\begin{pmatrix}-\partial_{\tau_1}\delta_{12}-H_{12} & -\Delta_{[12]}(\tau_1)\\ \sum_{i'\in I}\Delta^*_{i'}(\tau_1)\varphi^*_{i'}([12]) & -\partial_{\tau_1}\delta_{12}+H_{21}\end{pmatrix}\delta(\tau_1-\tau_2)\\&=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \varphi_i^*([12]) & 0\end{pmatrix}\delta(\tau-\tau_1)\delta(\tau_1-\tau_2)\end{aligned} \tag{99}$$

である。Green 関数 $G[\Delta,\Delta^*]$ を

$$G_{12}(\tau_1,\tau_2)=\begin{pmatrix}\mathcal{G}_{12}(\tau_1,\tau_2) & \mathcal{F}_{12}(\tau_1,\tau_2)\\ \mathcal{F}^*_{21}(\tau_2,\tau_1) & \mathcal{G}_{21}(\tau_2,\tau_1)\end{pmatrix} \tag{100}$$

とパラメタ付けする。すると

$$\begin{aligned}\frac{\delta S[\Delta,\Delta^*]}{\delta\Delta_i^*(\tau)}&=-\frac{1}{2}\sum_{12}\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2\left[\mathcal{F}_{12}(\tau_1,\tau_2)\varphi_i^*([21])\delta(\tau-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_1)\right]+V_{ij}^{-1}\Delta_j(\tau)\\&=-\frac{1}{2}\sum_{12}\left[\mathcal{F}_{12}(\tau,\tau)\varphi_i^*([21])\right]+V_{ij}^{-1}\Delta_j(\tau)\\&=\frac{1}{2}\sum_{12}\left[\mathcal{F}_{12}(\tau,\tau)\varphi_i^*([12])\right]+V_{ij}^{-1}\Delta_j(\tau)\end{aligned} \tag{101}$$

となる。trace だから $\sum_{12}f_{12}g_{21}$ に注意。また 12 の和を全て取っているから行列の足は残っていないことに注意。

これから鞍点方程式

$$\Delta_i(\tau) = -\frac{1}{2}\ V_{ij} \sum_{12} \left[\mathcal{F}_{12}(\tau,\tau;\Delta,\Delta^*)\varphi_j^*([12])\right] \tag{102}$$

を得る。

3.6 Ginzburg-Landau free energy

補助場 Δ, Δ^* の低次のみが分配関数に効く（連続転移の転移点近傍なら OK）と思って $\tilde{S}[\Delta,\Delta^*]$ を展開しよう。

$$\begin{aligned} Z &= \int D\Delta_i^* D\Delta_i\ e^{-\tilde{S}[\Delta_i]} \\ &= \int D\Delta_i^* D\Delta_i \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[G^{-1}[\Delta_i]\right] - \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \Delta_i^* V_{ij}^{-1}\Delta_j\right) \end{aligned} \tag{103}$$

$$\tilde{S}[\Delta_i] = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[G^{-1}[\Delta_i]\right] + \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} \Delta_i^* V_{ij}^{-1}\Delta_j \tag{104}$$

$$\left[G^{-1}[\Delta_i]\right]_{12}(\tau_1,\tau_2) = \begin{pmatrix} -\partial_{\tau_1}\delta_{12} - H_{12} & -\Delta_{[12]} \\ -\Delta^*_{[21]} & -\partial_{\tau_1}\delta_{12} + H_{21} \end{pmatrix} \delta(\tau_1-\tau_2) \tag{105}$$

$$\Delta_{[12]} = \sum_{i\in I} \Delta_i \varphi_i([12]),\quad \Delta^*_{[12]} = \sum_{i\in I} \Delta_i^* \varphi_i^*([12]), \tag{106}$$

だった。$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[G^{-1}[\Delta_i]\right]$ を Δ で展開すれば良い。

$$G^{-1}[\Delta_i] = G_0^{-1} - \hat{\Delta} \tag{107}$$

$$\begin{aligned} \left[G_0^{-1}\right]_{12}(\tau_1,\tau_2) &= \begin{pmatrix} -\partial_{\tau_1}\delta_{12} - H_{12} & 0 \\ 0 & -\partial_{\tau_1}\delta_{12} + H_{21} \end{pmatrix} \delta(\tau_1-\tau_2) \\ &= \frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} \begin{pmatrix} i\omega_n\delta_{12} - H_{12} & 0 \\ 0 & i\omega_n\delta_{12} + H_{21} \end{pmatrix} e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)} \\ &= \frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} \left[G_0^{-1}(\omega_n)\right]_{12} e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)} \end{aligned} \tag{108}$$

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{\Delta}\right]_{12}(\tau_1,\tau_2) &= \left[\hat{\Delta}(\tau_1)\right]_{12}\delta(\tau_1-\tau_2)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{[12]}(\tau_1) \\ \Delta^*_{[21]}(\tau_1) & 0 \end{pmatrix}\delta(\tau_1-\tau_2)\\
&= \sum_i \begin{pmatrix} 0 & \Delta_i(\tau_1)\varphi_i([12]) \\ \Delta^*_i(\tau_1)\varphi^*_i([21]) & 0 \end{pmatrix}\delta(\tau_1-\tau_2)\\
&\left(= \frac{1}{\beta}\sum_{\Omega_m,\omega_n}\sum_i \begin{pmatrix} 0 & \Delta_i(\Omega_m)\varphi_i([12]) \\ \left[\Delta_i(-\Omega_m)\right]^*\varphi^*_i([21]) & 0 \end{pmatrix} e^{-i\Omega_m\tau_1}e^{-i\Omega_n(\tau_1-\tau_2)}\right)
\end{aligned}
\tag{109}
$$

と分離する。ここで $\Omega_n = 2n\pi/\beta$ であり

$$
\begin{aligned}
\Delta_i(\tau) &= \sum_{\Omega_n}\Delta_i(\Omega_n)e^{-i\Omega_n\tau}\\
\Delta_i(\Omega_n) &= \frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau\Delta_i(\tau)e^{i\Omega_n\tau}
\end{aligned}
\tag{110}
$$

とした。すると

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}[\Delta_i] &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[G_0^{-1}-\hat{\Delta}\right] + \int_0^\beta d\tau\sum_{ij\in I}\Delta^*_i V^{-1}_{ij}\Delta_j\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathrm{even}}\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left[G_0\hat{\Delta}\right]^n + \int_0^\beta d\tau\sum_{ij\in I}\Delta^*_i V^{-1}_{ij}\Delta_j\\
&= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[G_0\hat{\Delta}\right]^2 + \frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left[G_0\hat{\Delta}\right]^4 + \int_0^\beta d\tau\sum_{ij\in I}\Delta^*_i V^{-1}_{ij}\Delta_j + O(\Delta^6)
\end{aligned}
\tag{111}
$$

となる。ここで定数項は無視した。また $\Delta=0$ からの展開では n が偶数の項しか残らない。$G_0(\tau_1,\tau_2)$ は

$$
\begin{aligned}
&G_0(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}G_0(\omega_n)e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)}\ ,\\
&\sum_{12}\left[G_0(\omega_n)\right]_{12}\left[G_0^{-1}(\omega_n)\right]_{23} = \delta_{13}\ ,\\
&G_0(\omega_n) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}(\omega_n) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}^h(\omega_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{112}
$$

で与えられる。2 次項 $\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[G_0\hat{\Delta}\right]^2$ は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[G_0\hat{\Delta}\right]^2 \\
&=\frac{1}{4}\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \sum_{1234} \\
&\mathrm{tr}\left[\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\left[G_0(\omega_n)\right]_{12} e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)}\left[\hat{\Delta}(\tau_2)\right]_{23}\delta(\tau_2-\tau_3)\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n'}\left[G_0(\omega_n')\right]_{34} e^{-i\omega_n'(\tau_3-\tau_4)}\left[\hat{\Delta}(\tau_4)\right]_{41}\delta(\tau_4-\tau_1)\right] \\
&=\frac{1}{4}\sum_{\omega_n\omega_n'}\sum_{1234}\mathrm{tr}\left[\left[G_0(\omega_n)\right]_{12}\left[\hat{\Delta}(\omega_n-\omega_n')\right]_{23}\left[G_0(\omega_n')\right]_{34}\left[\hat{\Delta}(\omega_n'-\omega_n)\right]_{41}\right] \\
&=\frac{1}{4}\sum_{\omega_n\omega_n'}\sum_{1234}\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}\left[\mathcal{G}(\omega_n)\right]_{12} & 0 \\ 0 & \left[\mathcal{G}^h(\omega_n)\right]_{12}\end{pmatrix}\sum_i\begin{pmatrix}0 & \Delta_i(\omega_n-\omega_n')\varphi_i([23]) \\ \left[\Delta_i(\omega_n'-\omega_n)\right]^*\varphi_i^*([32]) & 0\end{pmatrix}\right. \\
&\qquad\qquad\left.\begin{pmatrix}\left[\mathcal{G}(\omega_n')\right]_{34} & 0 \\ 0 & \left[\mathcal{G}^h(\omega_n')\right]_{34}\end{pmatrix}\sum_j\begin{pmatrix}0 & \Delta_j(\omega_n'-\omega_n)\varphi_j([41]) \\ \left[\Delta_j(\omega_n-\omega_n')\right]^*\varphi_j^*([14]) & 0\end{pmatrix}\right] \\
&=\frac{1}{2}\sum_{\omega_n\omega_n'}\sum_{1234}\mathrm{tr}\left[\left[\mathcal{G}(\omega_n)\right]_{12}\sum_i\Delta_i(\omega_n-\omega_n')\varphi_i([23])\left[\mathcal{G}^h(\omega_n')\right]_{34}\sum_j\left[\Delta_j(\omega_n-\omega_n')\right]^*\varphi_j^*([14])\right] \\
&=\frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{\omega_n\omega_n'}\Delta_i(\omega_n-\omega_n')\left[\Delta_j(\omega_n-\omega_n')\right]^*\sum_{1234}\mathrm{tr}\left[\left[\mathcal{G}(\omega_n)\right]_{12}\varphi_i([23])\left[\mathcal{G}^h(\omega_n')\right]_{34}\varphi_j^*([14])\right] \\
&=-\frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{\omega_n\omega_n'}\Delta_i(\omega_n-\omega_n')\left[\Delta_j(\omega_n-\omega_n')\right]^*\sum_{1234}\mathrm{tr}\left[\left[\mathcal{G}(\omega_n)\right]_{12}\varphi_i([23])\left[\mathcal{G}^h(\omega_n')\right]_{34}\varphi_j^*([41])\right] \\
&=-\frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{\Omega_m}\Delta_i(\Omega_m)\left[\Delta_j(\Omega_m)\right]^*\sum_{\omega_n}\sum_{1234}\mathrm{tr}\Big[\left[\mathcal{G}(\omega_n+\Omega_m/2)\right]_{12}\varphi_i([23])\left[\mathcal{G}^h(\omega_n-\Omega_m/2)\right]_{34}\varphi_j^*([41])\Big] \\
&=-\frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{\Omega_m}\left[\Delta_i(\Omega_m)\right]^*\Delta_j(\Omega_m)\sum_{\omega_n}\sum_{1234}\mathrm{tr}\Big[\left[\mathcal{G}(\omega_n+\Omega_m/2)\right]_{12}\varphi_j([23])\left[\mathcal{G}^h(\omega_n-\Omega_m/2)\right]_{34}\varphi_i^*([41])\Big]
\end{aligned}
\tag{113}
$$

と書ける。$\Omega_m = 2m\pi/\beta,\ \omega_n = (2n+1)\pi/\beta$ である。ここで基底の [12] に対する反対称性 $\varphi_i([12]) = -\varphi_i([21])$ を用いた。$\int_0^\beta d\tau\sum_{ij\in I}\Delta_i^* V_{ij}^{-1}\Delta_j$ は

$$
\int_0^\beta d\tau\sum_{ij\in I}\Delta_i^*(\tau)\Delta_j(\tau) = \beta\sum_{ij}\sum_{\Omega_m}\left[\Delta_i(\Omega_m)\right]^* V_{ij}^{-1}\Delta_j(\Omega_m) \tag{114}
$$

だから合わせて

$$
\begin{aligned}
&\tilde{S}_2[\Delta,\Delta^*] \\
&=\beta\sum_{ij}\sum_{\Omega_m}\left[\Delta_i(\Omega_m)\right]^*\Delta_j(\Omega_m) \\
&\left[V_{ij}^{-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\sum_{1234}\mathrm{tr}\Big[\left[\mathcal{G}(\omega_n+\Omega_m/2)\right]_{12}\varphi_j([23])\left[\mathcal{G}^h(\omega_n-\Omega_m/2)\right]_{34}\varphi_i^*([41])\Big]\right]
\end{aligned}
\tag{115}
$$

を得る。特に $\Omega_m = 0$ 成分は

$$\tilde{S}_2[\Delta, \Delta^*; \Omega_m = 0]$$
$$= \beta \sum_{ij} [\Delta_i(\Omega_m = 0)]^* \Delta_j(\Omega_m = 0) \left[V_{ij}^{-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \sum_{1234} \mathrm{tr}\Big[\left[\mathcal{G}(\omega_n)\right]_{12} \varphi_j([23]) \left[\mathcal{G}^h(\omega_n)\right]_{34} \varphi_i^*([41]) \Big] \right] \tag{116}$$

となる。

意味が不明瞭なので具体例で確かめよう。

3.6.1 s 波

$$H_0 = \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} \varepsilon(\boldsymbol{k}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha} c_{\boldsymbol{k}\alpha} = \sum_{\boldsymbol{k}_1\alpha\boldsymbol{k}_2\beta} \varepsilon(\boldsymbol{k}_1) \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2} \delta_{\alpha\beta} c^\dagger_{\boldsymbol{k}_1\alpha} c_{\boldsymbol{k}_2\beta} \tag{117}$$

$$H_{int} = -\frac{U}{V} \sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{q}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\uparrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\downarrow} c_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\downarrow} c_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\uparrow} \tag{118}$$

の場合を考える。

$$V_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} = \frac{U}{V} \delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'} \tag{119}$$

$$\varphi_{\boldsymbol{q}}([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)]) = \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2} (i\sigma_2)_{\alpha\beta} \tag{120}$$

$$\begin{aligned}
\left[G_0^{-1}\right]_{12}(\tau_1,\tau_2) &= \begin{pmatrix} -\partial_{\tau_1}\delta_{12} - H_{12} & 0 \\ 0 & -\partial_{\tau_1}\delta_{12} + H_{21} \end{pmatrix} \delta(\tau_1 - \tau_2) \\
&= \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \begin{pmatrix} i\omega_n\delta_{12} - H_{12} & 0 \\ 0 & i\omega_n\delta_{12} + H_{21} \end{pmatrix} e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)} \\
&= \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \left[G_0^{-1}(\omega_n)\right]_{12} e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)}
\end{aligned} \tag{121}$$

$$\left[G_0^{-1}(\omega_n)\right]_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) = \begin{pmatrix} i\omega_n - \varepsilon(\boldsymbol{k}_1) & 0 \\ 0 & i\omega_n + \varepsilon(\boldsymbol{k}_1) \end{pmatrix} \delta_{\alpha\beta}\delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2} \tag{122}$$

である。すると

$$\begin{aligned}
\left[G_0(\omega_n)\right]_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2) &= \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{\alpha\beta}(\omega_n, \boldsymbol{k}_1) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}^h_{\alpha\beta}(\omega_n, \boldsymbol{k}_1) \end{pmatrix} \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon(\boldsymbol{k}_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\omega_n + \varepsilon(\boldsymbol{k}_1)} \end{pmatrix} \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{123}$$

となり

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\sum_{1234}\mathrm{tr}\Big[\left[\mathcal{G}(\omega_n+\Omega_m/2)\right]_{12}\varphi_j([23])\left[\mathcal{G}^h(\omega_n-\Omega_m/2)\right]_{34}\varphi_i^*([41])\Big]\\
&\mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\omega_n+\Omega_m/2,\boldsymbol{k}_1)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\Big(\delta_{\boldsymbol{q}',\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3}(i\sigma_2)_{\beta\gamma}\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\mathcal{G}^h_{\gamma\delta}(\omega_n-\Omega_m/2,\boldsymbol{k}_3)\delta_{\gamma\delta}\delta_{\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4}\Big(\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_4+\boldsymbol{k}_1}(i\sigma_2)_{\delta\alpha}\Big)\\
&=-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\mathrm{tr}\left[\mathcal{G}(\omega_n+\Omega_m/2,\boldsymbol{k})\delta_{\boldsymbol{q}',\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'}(i\sigma_2)\mathcal{G}^h(\omega_n-\Omega_m/2,\boldsymbol{k}')\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}}(i\sigma_2)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\sum_{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{k}}\mathrm{tr}\left[\mathcal{G}(\omega_n+\Omega_m/2,\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q}/2)\delta_{\boldsymbol{q}',\boldsymbol{Q}}(i\sigma_2)\mathcal{G}^h(\omega_n-\Omega_m/2,-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q}/2)\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q}}(i\sigma_2)\right]\\
&=-\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'}\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n\boldsymbol{k}}\mathrm{tr}\left[\mathcal{G}(\omega_n+\Omega_m/2,\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2)(i\sigma_2)\mathcal{G}^h(\omega_n-\Omega_m/2,-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2)(i\sigma_2)\right]
\end{aligned}
\tag{124}
$$

となる。これは s 波に対する一般式である。上記は南部表示を

$$
\Psi_{\boldsymbol{k}\alpha}=\begin{pmatrix}c^*_{\boldsymbol{k}\alpha}\\ c_{\boldsymbol{k}\alpha}\end{pmatrix}
\tag{125}
$$

と取っている。南部表示は空間的に局所的に取るのが普通だから、その場合は

$$
\Psi_{\boldsymbol{k}\alpha}=\begin{pmatrix}c^*_{\boldsymbol{k}\alpha}\\ c_{-\boldsymbol{k}\alpha}\end{pmatrix}
\tag{126}
$$

とする。すると hole の Green 関数 $\mathcal{G}^h(\omega_n,\boldsymbol{k})$ の $\boldsymbol{k}$ の符号が変わる。こちらの表示では

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\sum_{1234}\mathrm{tr}\Big[\left[\mathcal{G}(\omega_n+\Omega_m/2)\right]_{12}\varphi_j([23])\left[\mathcal{G}^h(\omega_n-\Omega_m/2)\right]_{34}\varphi_i^*([41])\Big]\\
&=-\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'}\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n\boldsymbol{k}}\mathrm{tr}\left[\mathcal{G}(\omega_n+\Omega_m/2,\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2)(i\sigma_2)\mathcal{G}^h(\omega_n-\Omega_m/2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2)(i\sigma_2)\right]
\end{aligned}
\tag{127}
$$

よって Δ の 2 次項は

$$
\begin{aligned}
&\tilde{S}_2[\Delta,\Delta^*]\\
&\quad=\beta\sum_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'}\sum_{\Omega_m}\left[\Delta(\Omega_m,\boldsymbol{q})\right]^*\Delta(\Omega_m,\boldsymbol{q}')\\
&\quad\left[\frac{V}{U}\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'}-\delta_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'}\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n\boldsymbol{k}}\mathrm{tr}\left[\mathcal{G}(\omega_n+\Omega_m/2,\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2)(i\sigma_2)\mathcal{G}^h(\omega_n-\Omega_m/2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2)(i\sigma_2)\right]\right]\\
&\quad=\beta V\sum_{\boldsymbol{q}}\sum_{\Omega_m}\left[\Delta(\Omega_m,\boldsymbol{q})\right]^*\Delta(\Omega_m,\boldsymbol{q})\\
&\quad\left[\frac{1}{U}-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta V}\sum_{\omega_n\boldsymbol{k}}\mathrm{tr}\left[\mathcal{G}(\omega_n+\Omega_m/2,\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2)(i\sigma_2)\mathcal{G}^h(\omega_n-\Omega_m/2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2)(i\sigma_2)\right]\right]
\end{aligned}
\tag{128}
$$

3.7 Ginzburg-Landau（運動量空間表示）

$$Z = \int D\Delta^* D\Delta \; e^{-\tilde{S}[\Delta]}$$
$$= \int D\Delta^* D\Delta \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[G^{-1}[\Delta]\right] - \int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{q},ij\in I} \Delta_i^*(\boldsymbol{q})\left[v^{-1}(\boldsymbol{q})\right]_{ij}\Delta_j(\boldsymbol{q})\right) \tag{129}$$

$$\tilde{S}[\Delta] = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[G^{-1}[\Delta]\right] + \int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{q},ij\in I} \Delta_i^*(\boldsymbol{q})\left[v^{-1}(\boldsymbol{q})\right]_{ij}\Delta_j(\boldsymbol{q}) \tag{130}$$

$$\left[G^{-1}[\Delta]\right](\tau_1,\tau_2) = \begin{pmatrix} -\partial_\tau \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{0}}\delta_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{0}} & -\sum_{i\in I}\varphi^i_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})\Delta_i(\tau,\boldsymbol{q}) \\ -\sum_{i\in I}\Delta_i^*(\tau,\boldsymbol{q})\left[\varphi^i_{\beta\alpha}(\boldsymbol{k})\right]^* & -\partial_\tau \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{0}}\delta_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{k})\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{0}} \end{pmatrix}\delta(\tau_1-\tau_2) \tag{131}$$

$$\Delta^i_{\alpha\beta}(\tau,\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}) = \sum_{i\in I}\varphi^i_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})\Delta_i(\tau,\boldsymbol{q}),$$
$$\Delta^{i*}_{\alpha\beta}(\tau,\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}) = \sum_{i\in I}\Delta_i^*(\tau,\boldsymbol{q})\left[\varphi^i_{\beta\alpha}(\boldsymbol{k})\right]^*, \tag{132}$$

まず分離：

$$G^{-1}[\Delta] = G_0^{-1} - \hat{\Delta} \tag{133}$$

$$\left[G_0^{-1}\right](\tau_1,\tau_2) = \begin{pmatrix} -\partial_\tau\delta_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}) & 0 \\ 0 & -\partial_\tau\delta_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{0}}\delta(\tau_1-\tau_2)$$
$$= \frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\begin{pmatrix} i\omega_n\delta_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}) & 0 \\ 0 & i\omega_n\delta_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{0}}e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)} \tag{134}$$
$$= \frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} G_0^{-1}(\omega_n,\boldsymbol{k})\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{0}}e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)}$$

$$\hat{\Delta}(\tau_1,\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i\in I}\varphi^i_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})\Delta_i(\tau,\boldsymbol{q}) \\ \sum_{i\in I}\Delta_i^*(\tau,\boldsymbol{q})\left[\varphi^i_{\beta\alpha}(\boldsymbol{k})\right]^* & 0 \end{pmatrix}\delta(\tau_1-\tau_2) \tag{135}$$

すると

$$\tilde{S}[\Delta_i] = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[G_0^{-1} - \hat{\Delta}\right] + \int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I}\Delta_i^* V_{ij}^{-1}\Delta_j$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathrm{even}}\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left[G_0\hat{\Delta}\right]^n + \int_0^\beta d\tau\sum_{ij\in I}\Delta_i^* V_{ij}^{-1}\Delta_j \tag{136}$$
$$= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[G_0\hat{\Delta}\right]^2 + \int_0^\beta d\tau \sum_{\boldsymbol{q},ij\in I}\Delta_i^*(\boldsymbol{q})\left[v^{-1}(\boldsymbol{q})\right]_{ij}\Delta_j(\boldsymbol{q}) + \frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left[G_0\hat{\Delta}\right]^4 + O(\Delta^6)$$

となる。ここで定数項は無視した。また $\Delta = 0$ からの展開では n が偶数の項しか残らない。$G_0(\tau_1, \tau_2)$ は

$$\begin{aligned} &G_0(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} G_0(\omega_n) e^{-i\omega_n(\tau_1 - \tau_2)} \ , \\ &\sum_{12} \left[G_0(\omega_n)\right]_{12} \left[G_0^{-1}(\omega_n)\right]_{23} = \delta_{13} \ , \\ &G_0(\omega_n) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}(\omega_n) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}^h(\omega_n) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{137}$$

3.8 Ginzburg-Landau 有効作用

GL 有効作用

$$S_{GL}[\Delta, \Delta^*] = -\frac{1}{2} \mathrm{Tr} \ln \left[G^{-1}[\Delta, \Delta^*]\right] + \int_0^\beta d\tau \sum_{ij \in I} \Delta_i^* V_{ij}^{-1} \Delta_j \tag{138}$$

$$\left[G^{-1}[\Delta_i]\right]_{12}(\tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} -\partial_{\tau_1}\delta_{12} - H_{12} & -\Delta_{[12]} \\ -\Delta^*_{[21]} & -\partial_{\tau_1}\delta_{12} + H_{21} \end{pmatrix} \delta(\tau_1 - \tau_2) \tag{139}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{[12]} &= \sum_{i \in I} \Delta_i \varphi_i([12]), \\ \Delta^*_{[12]} &= \sum_{i \in I} \Delta_i^* \varphi_i^*([12]), \end{aligned} \tag{140}$$

を転移点近傍において $\Delta_i / T << 1$ を展開パラメタとして展開しよう。平均場＋ Gauss ゆらぎまでを扱う。$\Delta_i(\tau) = \Delta_i^{MF}$ を平均場とし、平均場の周りのゆらぎ：$\delta\Delta_i(\tau) = \Delta_i(\tau) - \Delta^{MF}$ について 2 次まで展開する。例えば s 波のチャンネルの場合、実空間基底で展開するとラベル $i \in I$ は $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ であり、平均場 Δ_i^{MF} 及びゆらぎ $\delta\Delta_i(\tau)$ は

$$\Delta^{MF}(\boldsymbol{x}) = \Delta^{MF} \quad (\boldsymbol{x} - \mathrm{indep.}) \tag{141}$$

$$\delta\Delta(\boldsymbol{x}, \tau) = \Delta(\boldsymbol{x}, \tau) - \Delta^{MF} \tag{142}$$

となる。運動量空間基底で展開するとラベル $i \in I$ はペアの重心運動量 $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^3$ であり、平均場 Δ_i^{MF} 及びゆらぎ $\delta\Delta_i(\tau)$ は

$$\Delta^{MF}(\boldsymbol{q}) = \begin{cases} \Delta^{MF} & (\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}) \\ 0 & (\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}) \end{cases} \tag{143}$$

$$\delta\Delta(\boldsymbol{q}, \tau) = \Delta(\boldsymbol{q}, \tau) - \Delta^{MF} \tag{144}$$

である。

平均場＋ Gauss ゆらぎの展開は一般的に

$$
\begin{aligned}
S_{GL}[\Delta, \Delta^*] = S_{GL}[\Delta^{MF}, \Delta^{MF*}] \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \sum_{ij} \delta\Delta_i^*(\tau_1) \left.\frac{\delta S_{GL}[\Delta, \Delta^*]}{\delta\Delta_i^*(\tau_1)\delta\Delta_j^*(\tau_2)}\right|_{\Delta\equiv\Delta^{MF},\Delta^*\equiv\Delta^{MF*}} \delta\Delta_j^*(\tau_2) \\
&+ \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \sum_{ij} \delta\Delta_i^*(\tau_1) \left.\frac{\delta S_{GL}[\Delta, \Delta^*]}{\delta\Delta_i^*(\tau_1)\delta\Delta_j(\tau_2)}\right|_{\Delta\equiv\Delta^{MF},\Delta^*\equiv\Delta^{MF*}} \delta\Delta_j(\tau_2) \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \sum_{ij} \delta\Delta_i(\tau_1) \left.\frac{\delta S_{GL}[\Delta, \Delta^*]}{\delta\Delta_i(\tau_1)\delta\Delta_j(\tau_2)}\right|_{\Delta\equiv\Delta^{MF},\Delta^*\equiv\Delta^{MF*}} \delta\Delta_j(\tau_2)
\end{aligned}
\tag{145}
$$

と書けるが、オーダー相内 ($\Delta^{MF} \neq 0$) では $\left.\frac{\delta S_{GL}[\Delta,\Delta^*]}{\delta\Delta_i^*(\tau_1)\delta\Delta_j(\tau_2)}\right|_{\Delta\equiv\Delta^{MF},\Delta^*\equiv\Delta^{MF*}}$ がゼロ固有値（ゴールドストーンモード）を持つので、ゴールドストーンモードとそれに直交するモードについては別々に扱う必要がある。以下では $T > T_c$ と $T < T_c$ に分けて GL 有効作用の表式を与えよう。

3.8.1 Ginzburg-Landau **有効作用**（$T > T_c$）

disorder 相で GL 有効作用を展開する。

4 Coulomb channel

斥力の Coulomb channel に対して、Stratonovich-Hubbard 変換、RPA の有効作用についてまとめる。

4.1 Coulomb channel のハミルトニアン

次の形の一般的な 2 体相互作用を考える：

$$H_{int} = \sum_{121'2'} V_{12,1'2'} c_1^\dagger c_2 c_{1'}^\dagger c_{2'} \tag{146}$$

作用を

$$-S[c,c^*] = \int_0^\beta d\tau \left(\sum_{12} c_1^* \left(-\partial_\tau \delta_{12} - H_{12}\right) c_2 - \sum_{121'2'} V_{12,1'2'} c_1^* c_2 c_{1'}^* c_{2'} \right) \tag{147}$$

とする。虚時間の自由度 τ は必要があるまで特に明示しない。$V_{12,1'2'}$ は足の入れ替え $(1 \leftrightarrow 1'), (2 \leftrightarrow 2')$ に対して反対称化されているものとする：

$$V_{12,1'2'} = -V_{1'2,12'} = -V_{12',1'2} = V_{1'2',12} \tag{148}$$

特に $(12 \leftrightarrow 1'2')$ に対して対称である：$V_{12,1'2'} = V_{1'2',12}$. またエルミト性：

$$V_{12,1'2'} = V_{21,2'1'}^* \tag{149}$$

も満たす。Cooper channel の場合とは異なり、足 12 に関して対称性を考える必要はない。複素 c-数（ボソン）の補助場を導入して Stratonovich-Hubbard 変換する際に、ガウス積分の収束性より引力と斥力とでは Stratonovich-Hubbard 変換が異なる。つまり、ひとつの Stratonovich-Hubbard 変換で引力と斥力は同時にカバーできない。ここでは斥力に対する Stratonovich-Hubbard 変換を考えたいので、予め扱う $V_{12,1'2'}$ を以下のように制限しておく。まず自由度 12 は何らかの “実” な基底 $\varphi_i(12)$, $[\varphi_i(12)]^* = \varphi_i(12)$ で展開できるものとする：

$$\begin{gathered} f(12) = \sum_i f_i \varphi_i(12) \ , \\ \sum_{12} \varphi_i(12) \varphi_j(12) \propto \delta_{ij} \end{gathered} \tag{150}$$

ここで “基底”$\varphi_i([12])$ の直交性は仮定するが規格化可能性は仮定しない。すると $V_{12,1'2'}$ は

$$V_{12,1'2'} = \sum_{ij} V_{ij} \varphi_i(12) \varphi_j(1'2') \tag{151}$$

と展開できる。$V_{12,1'2'}$ の対称性より V_{ij} は対称行列である。よって固有値は実数である。斥力が存在するチャンネル（基底）にのみ Stratonovich-Hubbard 変換が適用できる（引力には別の

Stratonovich-Hubbard 変換を適用）ので、斥力であるチャンネルを予め規定する。つまり自由度 12 の部分空間 I が存在し、部分空間 I 内の行列 V_{ij} $(i,j\in I)$ の固有値は全て正（ゼロもダメ）であるとする。よって次の形の相互作用ハミルトニアンを考える：

$$H_{int}=\sum_{ij\in I}V_{ij}\left(\sum_{12}\varphi_i([12])c_1^\dagger c_2\right)\left(\sum_{1'2'}\varphi_j(1'2')c_{1'}^\dagger c_{2'}\right) \qquad \text{(ただし } V_{ij}\text{の固有値は全て正)} \tag{152}$$

結局、斥力のクーロン・チャンネルは一般的に次の表式となる：

> $i\in I$ を斥力のチャンネルのラベルとする。V_{ij} の固有値を全て正とする。
>
> $$H_{int}=\sum_{ij\in I}V_{ij}\left(\sum_{12}\varphi_i([12])c_1^\dagger c_2\right)\left(\sum_{1'2'}\varphi_j(1'2')c_{1'}^\dagger c_{2'}\right) \tag{153}$$
>
> $$\begin{aligned}-S[c,c^*]=\int_0^\beta d\tau\Bigg\{&\sum_{12}c_1^*\left(-\partial_\tau\delta_{12}-H_{12}\right)c_2\\&-\sum_{ij\in I}V_{ij}\left(\sum_{12}\varphi_i(12)c_1^*c_2\right)\left(\sum_{1'2'}\varphi_j(1'2')c_{1'}^*c_{2'}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{154}$$

チャンネルの集合 I、及び、基底 $\varphi_i(12)$ については抽象的で分かりにくいのでいくつかの具体例で確認する。

4.1.1 具体例：等方的なハードコア斥力

contact 型で等方的な斥力ハミルトニアン

$$\begin{aligned}H_{int}&=U\int d^3\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})\\&=U\sum_{\boldsymbol{q}}\rho(\boldsymbol{q})\rho(-\boldsymbol{q})=U\sum_{\boldsymbol{q}}\rho(\boldsymbol{q})\rho^\dagger(\boldsymbol{q})\\&=U\int d^3\boldsymbol{x}\psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{x})\psi_\alpha(\boldsymbol{x})\psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{x})\psi_\beta(\boldsymbol{x})\\&=\frac{U}{V}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{q}}c^\dagger_{\boldsymbol{k}-\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha}c_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\alpha}c^\dagger_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta}c_{\boldsymbol{k}'-\frac{\boldsymbol{q}}{2}\beta}\end{aligned} \tag{155}$$

を考えよう。$\psi_\alpha(\boldsymbol{x})$ と $c_{\boldsymbol{k}\alpha}$ の基底の変換は

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\boldsymbol{x})&=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}c_{\boldsymbol{k}\alpha}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\\c_{\boldsymbol{k}\alpha}&=\frac{1}{\sqrt{V}}\int d^3\boldsymbol{x}\psi_\alpha(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\end{aligned} \tag{156}$$

である。さて基底 $\varphi_i(12)$ が何であるかを考えたいのだが、実空間表示と波数表示で事情が異なる。実場 $\phi(\boldsymbol{x})$, $\phi^*(\boldsymbol{x})=\phi(\boldsymbol{x})$ を波数表示すると複素場 $\phi(\boldsymbol{q})$, $\phi(-\boldsymbol{q})=\phi^*(\boldsymbol{q})$ となり独立な自由度が波

数空間の半分、例えば Re $q_x > 0$ となり波数表示は扱いが面倒である。そこで、必要が無い限り実空間表示で考えよう。すると基底 $\varphi_i(12)$ は

$$H_{int} = U \int d^3\boldsymbol{x} \psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{x})\psi_\alpha(\boldsymbol{x})\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x})\psi_\beta(\boldsymbol{x}) \tag{157}$$

より、チャンネルのラベルは密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ の位置 $\boldsymbol{x}$ であり V_{ij} 及びチャンネルの基底 $\varphi_i(12)$ は

$$H_{int} = U \int d^3\boldsymbol{x} \psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{x})\psi_\alpha(\boldsymbol{x})\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x})\psi_\beta(\boldsymbol{x}) \tag{158}$$

$$i \mapsto \boldsymbol{x} \tag{159}$$

$$V_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = U\delta_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} \tag{160}$$

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}((\boldsymbol{x}_1\alpha)(\boldsymbol{x}_2\beta)) = \delta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1}\delta_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2}\delta_{\alpha\beta} \tag{161}$$

となる。

4.1.2 **具体例：接触型、**CDW・SDW

前節の接触型の斥力にスピン空間の依存性を加える。$\sigma_\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$ とする。$U_{\mu\nu}$ の固有値を全て正とする。V_{ij} 及び $\varphi_i(12)$ は

$$H_{int} = U_{\mu\nu} \int d^3\boldsymbol{x} \psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{x})(\sigma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{x})\psi^\dagger_{\alpha'}(\boldsymbol{x})(\sigma_\nu)_{\alpha'\beta'}\psi_{\beta'}(\boldsymbol{x}) \tag{162}$$

$$i \mapsto \{\mu, \boldsymbol{x}\} \tag{163}$$

$$V_{\mu\boldsymbol{x},\nu\boldsymbol{y}} = U_{\mu\nu}\delta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \tag{164}$$

$$\varphi_{\mu\boldsymbol{x}}((\boldsymbol{x}_1\alpha)(\boldsymbol{x}_2\beta)) = \delta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1}\delta_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2}(\sigma_\mu)_{\alpha\beta} \tag{165}$$

4.2 Stratonovich-Hubbard 変換

実ボソン場の補助場 $\phi_i(\tau)$ $(i \in I)$ を導入する。基底の添字 $i \in I$ が補助場の自由度となる。V を対称行列とする：$V_{ij} = V_{ji}$. Stratonovich-Hubbard 変換：

$$e^{-\rho^T V \rho} = \int D\phi \exp\left(-\frac{1}{4}\phi^T V^{-1}\phi - i\phi^T \rho\right) \tag{166}$$

を実行すると

$$\begin{aligned} e^{-S_{int}} &= \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I} V_{ij}\left(\sum_{12}\varphi_i(12)c_1^* c_2\right)\left(\sum_{1'2'}\varphi_j(1'2')c_{1'}^* c_{2'}\right)\right) \\ &= \int D\phi \exp\left(-\frac{1}{4}\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I}\phi_i V_{ij}^{-1}\phi_j - i\sum_i \int_0^\beta d\tau \phi_i(\tau)\left(\sum_{12}\varphi_i(12)c_1^* c_2\right)\right) \end{aligned} \tag{167}$$

となる。分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \int Dc^* Dc\; e^{-S[c]} \\ &= \int Dc^* Dc D\phi \exp\left(\int_0^\beta d\tau \sum_{12} c_1^* \left(-\partial_\tau \delta_{12} - H_{12}\right) c_2 \right. \\ &\qquad\qquad \left. -\frac{1}{4}\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I}\phi_i V_{ij}^{-1}\phi_j - i\sum_i \int_0^\beta d\tau \phi_i(\tau)\left(\sum_{12}\varphi_i(12)c_1^* c_2\right)\right) \\ &= \int Dc^* Dc D\phi \exp\left(\int_0^\beta d\tau \sum_{12} c_1^* \left(-\partial_\tau \delta_{12} - H_{12} - i\sum_i \phi_i(\tau)\varphi_i(12)\right) c_2 - \frac{1}{4}\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I}\phi_i V_{ij}^{-1}\phi_j\right) \end{aligned} \tag{168}$$

フェルミオンの自由度を積分すると

$$Z = \int D\phi\; \exp\left(-\frac{1}{4}\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I}\phi_i V_{ij}^{-1}\phi_j + \mathrm{Tr}\,\ln\, G^{-1}[\phi]\right) \tag{169}$$

ただし

$$G_{12}^{-1}(\tau_1,\tau_2) = \left(-\partial_{\tau_1}\delta_{12} - H_{12} - i\sum_i \phi_i(\tau)\varphi_i(12)\right)\delta(\tau_1 - \tau_2) \tag{170}$$

である。

V_{ij} と $\varphi_i([(\boldsymbol{k}_1\alpha)(\boldsymbol{k}_2\beta)])$ の具体例を付記する。

contact CDW・SDW：

$$H_{int} = U_{\mu\nu}\int d^3\boldsymbol{x}\psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{x})(\sigma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{x})\psi_{\alpha'}^\dagger(\boldsymbol{x})(\sigma_\nu)_{\alpha'\beta'}\psi_{\beta'}(\boldsymbol{x}) \tag{171}$$

$$i \mapsto \{\mu, \boldsymbol{x}\} \tag{172}$$

$$V_{\mu\boldsymbol{x},\nu\boldsymbol{y}} = U_{\mu\nu}\delta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \tag{173}$$

$$\varphi_{\mu\boldsymbol{x}}((\boldsymbol{x}_1\alpha)(\boldsymbol{x}_2\beta)) = \delta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1}\delta_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2}(\sigma_\mu)_{\alpha\beta} \tag{174}$$

長距離クーロン：

$$H_{int} = \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}d^3\boldsymbol{y}\frac{e^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{x})\psi_\alpha(\boldsymbol{x})\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{y})\psi_\beta(\boldsymbol{y}) \tag{175}$$

$$i \mapsto \boldsymbol{x} \tag{176}$$

$$V_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \frac{e^2}{2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{177}$$

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}((\boldsymbol{x}_1\alpha)(\boldsymbol{x}_2\beta)) = \delta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1}\delta_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2}\delta_{\alpha\beta} \tag{178}$$

4.3 クーロンガス

具体例として長距離クーロンの存在下のスクリーニングとプラズマギャップを確認する。波数表示に移ったほうが計算が楽である。

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_0^\beta d\tau\sum_{ij\in I}\phi_i V^{-1}_{ij}\phi_j &= \frac{1}{4}\int_0^\beta d\tau\int d^3xd^3y\ \phi(\boldsymbol{x},\tau)V^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{y},\tau)\\ &= \frac{\beta V}{4}\sum_{\Omega_m}\sum_{\boldsymbol{q}}\phi(\boldsymbol{q},\Omega_m)V^{-1}(\boldsymbol{q})\phi(-\boldsymbol{q},-\Omega_m)\end{aligned} \tag{179}$$

ここで

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x},\tau) &= \sum_{\Omega_m,\boldsymbol{q}}\phi(\boldsymbol{q},\Omega_m)e^{-i\Omega_m\tau+i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}},\\ \phi(\boldsymbol{q},\Omega_m) &= \frac{1}{\beta V}\int d\tau d^3x\phi(\boldsymbol{x},\tau)e^{i\Omega_m\tau-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\end{aligned} \tag{180}$$

$$V^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{q}}V^{-1}(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \tag{181}$$

とした。

$$\int d^3yV(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})V^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) \tag{182}$$

より

$$V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{q}}V(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \tag{183}$$

と定義すれば

$$V^{-1}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{V(\boldsymbol{q})} \tag{184}$$

である。さて $V(\boldsymbol{q})$ は $V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{e^2}{2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} = \frac{1}{2}\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{q}}\frac{4\pi e^2}{\boldsymbol{q}^2}e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}$ より $V(\boldsymbol{q}) = \frac{2\pi e^2}{\boldsymbol{q}^2}$ だから

$$V^{-1}(\boldsymbol{q}) = \frac{\boldsymbol{q}^2}{2\pi e^2} \tag{185}$$

である。よって

$$\frac{1}{4}\int_0^\beta d\tau \sum_{ij\in I}\phi_i V_{ij}^{-1}\phi_j = \beta V \sum_{\Omega_m,\boldsymbol{q}}\frac{\boldsymbol{q}^2}{8\pi e^2}\phi(\boldsymbol{q},\Omega_m)\phi(-\boldsymbol{q},-\Omega_m) \tag{186}$$

$$\begin{aligned} G_{12}^{-1}(\tau_1,\tau_2) &= \left(-\partial_{\tau_1}\delta_{12} - H_{12} - i\sum_i \phi_i(\tau)\varphi_i(12)\right)\delta(\tau_1-\tau_2) \\ &= \left(-\partial_{\tau_1}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - i\phi(\boldsymbol{x},\tau)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{\alpha\beta}\right)\delta(\tau_1-\tau_2) \\ &=: G_0^{-1} - V \end{aligned} \tag{187}$$

と分離。スピン軌道相互作用は考えない。

$$\begin{aligned} G_0^{-1} &= \left(-\partial_{\tau_1}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\delta(\tau_1-\tau_2) \\ &= \frac{1}{\beta V}\sum_{\omega_n\boldsymbol{k}}(i\omega_n - \varepsilon_{\boldsymbol{k}} + \mu)\,\delta_{\alpha\beta}e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)+i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \end{aligned} \tag{188}$$

より

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{\beta V}\sum_{\omega_n\boldsymbol{k}} G_0(\omega_n,\boldsymbol{k})e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)+i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\ &= \frac{1}{\beta V}\sum_{\omega_n\boldsymbol{k}}(i\omega_n - \varepsilon_{\boldsymbol{k}} + \mu)^{-1}\,\delta_{\alpha\beta}e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)+i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \end{aligned} \tag{189}$$

$$V = i\phi(\boldsymbol{x},\tau_1)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{\alpha\beta}\delta(\tau_1-\tau_2) \tag{190}$$

作用を ϕ の 2 次まで展開して（RPA）

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \frac{1}{4}\int_0^\beta d\tau\sum_{ij\in I}\phi_i V_{ij}^{-1}\phi_j - \mathrm{Tr}\ln G^{-1}[\phi] \\ &\cong \beta V\sum_{\Omega_m,\boldsymbol{q}}\frac{\boldsymbol{q}^2}{8\pi e^2}\phi(\boldsymbol{q},\Omega_m)\phi(-\boldsymbol{q},-\Omega_m) + \mathrm{Tr}[G_0V] + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[G_0VG_0V] \end{aligned} \tag{191}$$

ここで

$$\mathrm{Tr}[G_0V] \propto \phi(\boldsymbol{0},0) \tag{192}$$

は一様・静的な成分であるがこれはバックグラウンドの正電荷による中性条件よりこのような成分は考えないのでゼロとする。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[G_0VG_0V] \\
&= \frac{1}{2}\int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 \mathrm{tr}[G_0(1,2)V(2,3)G_0(3,4)V(4,1)] \\
&= \frac{1}{2}\int d\tau_1 d\tau_2 d^3x_1 d^3x_2 \mathrm{tr}\left[\frac{1}{\beta V}\sum_{\omega_n \boldsymbol{k}} G_0(\omega_n,\boldsymbol{k})e^{-i\omega_n(\tau_1-\tau_2)+i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)} i\phi(\tau_1,\boldsymbol{x}_1)\right. \\
&\qquad\qquad \left.\frac{1}{\beta V}\sum_{\omega_n' \boldsymbol{k}'} G_0(\omega_n',\boldsymbol{k}')e^{-i\omega_n'(\tau_2-\tau_1)+i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)} i\phi(\tau_2,\boldsymbol{x}_2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\omega_n \boldsymbol{k}}\sum_{\omega_n' \boldsymbol{k}'} \mathrm{tr}\left[G_0(\omega_n,\boldsymbol{k})i\phi(\omega_n'-\omega_n,\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})G_0(\omega_n',\boldsymbol{k}')i\phi(\omega_n-\omega_n',\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\right] \\
&= \sum_{\Omega_n \boldsymbol{q}}\left(-\frac{1}{2}\sum_{\omega_n \boldsymbol{k}}\mathrm{tr}\left[G_0(\omega_n+\Omega_m/2,\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2)G_0(\omega_n-\Omega_m/2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2)\right]\right)\phi(\Omega_m,\boldsymbol{q})\phi(-\Omega_m,-\boldsymbol{q}) \\
&=: \beta V\sum_{\Omega_n \boldsymbol{q}}\left(-\frac{1}{2}\pi(\Omega_m,\boldsymbol{q})\right)\phi(\Omega_m,\boldsymbol{q})\phi(-\Omega_m,-\boldsymbol{q})
\end{aligned}
\tag{193}
$$

ここで分極関数

$$
\pi(\Omega_m,\boldsymbol{q}) = \frac{1}{\beta V}\sum_{\omega_n \boldsymbol{k}}\mathrm{tr}\left[G_0(\omega_n+\Omega_m/2,\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2)G_0(\omega_n-\Omega_m/2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2)\right] \tag{194}
$$

を定義した。よって RPA 近似の作用として

$$
\begin{aligned}
S_2[\phi] &= \beta V\sum_{\Omega_m,\boldsymbol{q}}\frac{\boldsymbol{q}^2}{8\pi e^2}\phi(\boldsymbol{q},\Omega_m)\phi(-\boldsymbol{q},-\Omega_m) + \beta V\sum_{\Omega_n \boldsymbol{q}}\left(-\frac{1}{2}\pi(\Omega_m,\boldsymbol{q})\right)\phi(\Omega_m,\boldsymbol{q})\phi(-\Omega_m,-\boldsymbol{q}) \\
&= \beta V\sum_{\Omega_m,\boldsymbol{q}}\left(\frac{\boldsymbol{q}^2}{8\pi e^2}-\frac{1}{2}\pi(\Omega_m,\boldsymbol{q})\right)\phi(\Omega_m,\boldsymbol{q})\phi(-\Omega_m,-\boldsymbol{q})
\end{aligned}
\tag{195}
$$

を得る。通常は $\phi \mapsto e\phi$ と再定義して

$$
S_2[\phi] = \beta V\sum_{\Omega_m,\boldsymbol{q}}\left(\frac{\boldsymbol{q}^2}{8\pi}-\frac{1}{2}e^2\pi(\Omega_m,\boldsymbol{q})\right)\phi(\Omega_m,\boldsymbol{q})\phi(-\Omega_m,-\boldsymbol{q}) \tag{196}
$$

とする。

分極関数を計算しよう。

$$
\begin{aligned}
\pi(\Omega_m,\boldsymbol{q}) &= \frac{1}{\beta V}\sum_{\omega_n \boldsymbol{k}} \mathrm{tr}\left[G_0(\omega_n+\Omega_m/2,\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2)G_0(\omega_n-\Omega_m/2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2)\right] \\
&= \frac{1}{\beta V}\sum_{\omega_n \boldsymbol{k}} \mathrm{tr}\left[G_0(\omega_n+\Omega_m,\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2)G_0(\omega_n,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2)\right] \\
&= \frac{2}{\beta V}\sum_{\omega_n \boldsymbol{k}} \frac{1}{i\omega_n+i\Omega_m-\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2}}\frac{1}{i\omega_n-\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2}} \\
&= -\frac{2}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\int\frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{z+i\Omega_m-\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2}}\frac{1}{z-\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2}}f(z) \\
&= \frac{2}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{f(\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2})-f(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2})}{i\Omega_m+\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2}-\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2}}
\end{aligned}
\tag{197}
$$

$e^{i\Omega_m}=1$ に注意。$|\boldsymbol{q}|<<k_F$ で長波長展開する。

$$
\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2}-\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2}=\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{q}+O(q^3) \tag{198}
$$

$$
f(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}/2})-f(\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}/2})=\frac{\partial f(\xi_{\boldsymbol{k}})}{\partial\xi}\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{q}+O(q^3) \tag{199}
$$

より

$$
\pi(\Omega_m,\boldsymbol{q})=\frac{2}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(-\frac{\partial f(\xi_{\boldsymbol{k}})}{\partial\xi}\right)\frac{\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{q}}{i\Omega_m-\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{q}}+O(q^3) \tag{200}
$$

絶対零度としよう。$-\frac{\partial f(\xi_{\boldsymbol{k}})}{\partial\xi}=\delta(\xi_{\boldsymbol{k}})+O(T^2)$ として

$$
\pi(\Omega_m,\boldsymbol{q})=\frac{2}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\delta(\xi_{\boldsymbol{k}})\frac{\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{q}}{i\Omega_m-\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{q}}+O(T^2,q^3) \tag{201}
$$

等方的なフェルミ面を仮定する。$\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{q}=v_Fq\cos\theta$ として

$$
\begin{aligned}
\pi(\Omega_m,\boldsymbol{q}) &= \frac{2}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\delta(v_F(k-k_F))\frac{v_Fq\cos\theta}{i\Omega_m-v_Fq\cos\theta}+O(T^2,q^3) \\
&= \frac{2}{(2\pi)^2}\int k^2dk\int_1^1 d\cos\theta\,\delta(v_F(k-k_F))\frac{v_Fq\cos\theta}{i\Omega_m-v_Fq\cos\theta}+O(T^2,q^3) \\
&= \frac{2}{(2\pi)^2}\frac{k_F^2}{v_F}\int_1^1 d\cos\theta\frac{v_Fq\cos\theta}{i\Omega_m-v_Fq\cos\theta}+O(T^2,q^3) \\
&= \frac{2}{(2\pi)^2}\frac{k_F^2}{v_F}\left(-2-\frac{i\Omega_m}{v_Fq}\ln\left[\frac{i\Omega_m-v_fq}{i\Omega_m+v_fq}\right]\right)+O(T^2,q^3) \\
&= -2\rho_0\left(1-\frac{\Omega_m}{v_Fq}\tan^{-1}\left[\frac{v_fq}{\Omega_m}\right]\right)+O(T^2,q^3)
\end{aligned}
\tag{202}
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
\tan\left(\frac{1}{2i}\ln\left[\frac{i-a}{i+a}\right]\right) &= \frac{1}{i}\frac{\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left[\frac{i-a}{i+a}\right]\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{i-a}{i+a}\right]\right)}{\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left[\frac{i-a}{i+a}\right]\right)+\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{i-a}{i+a}\right]\right)} \\
&= \frac{1}{i}\frac{\left[\frac{i-a}{i+a}\right]^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{i-a}{i+a}\right]^{-\frac{1}{2}}}{\left[\frac{i-a}{i+a}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{i-a}{i+a}\right]^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{i}\frac{(i-a)-(i+a)}{(i-a)+(i+a)} = a
\end{aligned} \tag{203}
$$

に注意。ここで $\rho_0 = \frac{2k_F^2}{(2\pi)^2 v_F}$ はスピン当たりの DOS。

静的極限 $\Omega_m << v_F q$ は

$$
\pi(\Omega_m, \boldsymbol{q}) \cong -2\rho_0\left(1-\frac{\pi}{2}\frac{|\Omega_m|}{v_F q}\right) \tag{204}
$$

すると ϕ の Green 関数は

$$
D(\Omega_m, \boldsymbol{q}) \cong \frac{1}{\frac{q^2}{8\pi}+e^2\rho_0\left[1-\frac{\pi}{2}\frac{|\Omega_m|}{v_F q}\right]} \tag{205}
$$

となり、$\Omega_m \mapsto \Omega + i0$ と解析接続すると

$$
D_R(\Omega, \boldsymbol{q}) \cong \frac{1}{\frac{q^2}{8\pi}+e^2\rho_0\left[1+\frac{\pi}{2}\frac{i\Omega_m}{v_F q}\right]} \tag{206}
$$

となり有限の寿命と $\lambda = (8\pi e^2\rho_0)^{-\frac{1}{2}}$ の長さスケールのスクリーニングを得る。

動的極限 $\Omega_m >> v_F q$ は

$$
\pi(\Omega_m, \boldsymbol{q}) \cong -\frac{2}{3}\rho_0\frac{v_F^2 q^2}{\Omega_m^2} \tag{207}
$$

より

$$
\begin{aligned}
D(\Omega_m, \boldsymbol{q}) &\cong \frac{1}{\frac{q^2}{8\pi}+\frac{e^2}{3}\rho_0\frac{v_F^2 q^2}{\Omega_m^2}} \\
&= \frac{8\pi}{q^2\left(1+\frac{\omega_p^2}{\Omega_m^2}\right)}
\end{aligned} \tag{208}
$$

を得る。ここで $\omega_p^2 = \frac{8\pi\rho_0 e^2 v_F^2}{3}$ はプラズマ周波数。解析接続 $\Omega_m \mapsto \Omega + i0$ して

$$
D_R(\Omega, \boldsymbol{q}) \cong \frac{8\pi}{q^2\left(1-\frac{\omega_p^2}{(\Omega+i0)^2}\right)} \tag{209}
$$