

Goursatの補題

塩崎謙

October 19, 2025

Goursatの補題については, [2]が詳しい. 群の単位元を e と書く. 一般に, 群準同型 $f : A \rightarrow B$ に対して, 部分群 $S \subset B$ に対して $f^{-1}(S) = \{a \in A \mid f(a) \in S\}$ は群であることに注意する. ($f(aa') = f(a)f(a') \in S$ より $a, a' \in f^{-1}(S)$ なら $aa' \in f^{-1}(S)$.)

Lemma 0.1 (Goursat). A, B を群とする. 部分群 $C \subset A \times B$ と5つ組 $Q = (\bar{A}, N_A, \bar{B}, N_B, \theta)$ の間に1対1対応がある. ここで, $N_A \triangleleft \bar{A} \subset A$, $N_B \triangleleft \bar{B} \subset B$ であり, θ は同型写像 $\theta : \bar{A}/N_A \xrightarrow{\cong} \bar{B}/N_B$ である.

(証明[2]) C を部分群 $C \subset A \times B$ とする.

$$\bar{A} = \{a \in A \mid (a, b) \in C\}, \quad N_A = \{a \in A \mid (a, e) \in C\}, \quad (0.1)$$

$$\bar{B} = \{b \in B \mid (a, b) \in C\}, \quad N_B = \{b \in B \mid (e, b) \in C\}, \quad (0.2)$$

とする. C は群であるから, $\bar{A}, \bar{B}$ も群. 任意の $a' \in N_A, a \in \bar{A}$ に対してある $b \in B$ が存在して

$$(a, b)(a', e)(a, b)^{-1} = (aa'a^{-1}, e) \quad (0.3)$$

であるから $aN_Aa^{-1} = N_A$ より, $N_A \triangleleft \bar{A}$. $N_B \triangleleft \bar{B}$ も同様. θ は

$$\theta(aN_A) := bN_B, \quad \text{where } (a, b) \in C, \quad (0.4)$$

と定義する. 右辺がwell-definedであることは, $(a, b), (a, b') \in C$ とすると $(a, b)^{-1}(a, b') = (1, b^{-1}b') \in C$ より $b^{-1}b' \in N_B$, すなわち $b \in b'N_B$ より. 同様に, $(a, b), (a', b) \in C$ とすると $a \in a'N_A$ より左辺もwell-defined. 群準同型性は, $(a, b), (a', b') \in C$ とすると $C \ni (a, b)(a', b') = (aa', bb')$ より. $\theta(a) = N_B$ とすると $(a, b) \in C$ かつ $(e, b) \in C$. このとき $(a, e) = (a, b)(e, b)^{-1} \in C$ より $a \in N_A$ であるから θ は単射. 任意の $b \in \bar{B}$ に対して $(a, b) \in C$ なる a が存在するから θ は全射. これで5つ組 $f(C) := (\bar{A}, N_A, \bar{B}, N_B, \theta)$ が構成された.

逆に, 5つ組 $Q = (\bar{A}, N_A, \bar{B}, N_B, \theta)$ が与えられると, θ より部分集合

$$\mathcal{G}_\theta := \{(aN_A, \theta(aN_A)) \mid aN_A \in \bar{A}/N_A\} \subset \bar{A}/N_A \times \bar{B}/N_B \quad (0.5)$$

が定義される. θ の群準同型性より, $\mathcal{G}_\theta$ は群である. 自然な全射

$$p : \bar{A} \times \bar{B} \rightarrow \bar{A}/N_A \times \bar{B}/N_B \quad (0.6)$$

の逆像を取り, 部分群

$$g(Q) := p^{-1}(\mathcal{G}_\theta) \subset \bar{A} \times \bar{B} \subset A \times B \quad (0.7)$$

が定まる.

最後に, この対応 f と g が互いに逆であることを示す.

$g \circ f = \text{id}$ を示す. $C \subset A \times B$ を部分群とし, $f(C) = (\bar{A}, N_A, \bar{B}, N_B, \theta)$ を上で定めたとおりに取る. このとき

$$g(f(C)) = \{ (a, b) \in A \times B \mid (aN_A, bN_B) \in \mathcal{G}_\theta \} \quad (0.8)$$

であるが, $\mathcal{G}_\theta$ の定義より

$$(aN_A, bN_B) \in \mathcal{G}_\theta \iff (a, b) \in C \quad (0.9)$$

よって $g(f(C)) = C$.

$f \circ g = \text{id}$ を示す. $Q = (\bar{A}, N_A, \bar{B}, N_B, \theta)$ を与え, $C' := g(Q) = p^{-1}(\mathcal{G}_\theta) \subset \bar{A} \times \bar{B}$ とおく. C' に対して $f(C') = (\bar{A}', N'_A, \bar{B}', N'_B, \theta')$ を構成する. まず,

$$\bar{A}' = \{ a \in A \mid (a, b) \in C' \} = \{ a \in A \mid a \in \bar{A} \} = \bar{A}, \quad (0.10)$$

$$\bar{B}' = \{ b \in B \mid (a, b) \in C' \} = \{ b \in B \mid bN_B \in \theta(\bar{A}/N_A) = \bar{B}/N_B \} = \{ b \in B \mid b \in \bar{B} \} = \bar{B}, \quad (0.11)$$

$$N'_A = \{ a \in A \mid (a, e) \in C' \} = \{ a \in A \mid \theta(aN_A) = N_B \} = \{ a \in A \mid a \in N_A \} = N_A, \quad (0.12)$$

$$N'_B = \{ b \in B \mid (e, b) \in C' \} = \{ b \in B \mid bN_B = \theta(N_A) = N_B \} = \{ a \in B \mid b \in N_B \} = N_B \quad (0.13)$$

に注意. $\theta' = \theta$ を示す.

$$\theta'(aN_A) = bN_B, \quad \text{where } (a, b) \in C' \quad (0.14)$$

であるが, $(a, b) \in C'$ は $a \in \bar{A}$ かつ $bN_B = \theta(aN_A)$ と同値であるから $\theta' = \theta$. $\square$

References

Kristine Bauer, Debasis Sen, Peter Zvengrowski, *A Generalized Goursat Lemma*, arXiv:1109.0024.