

メモ：高次Berry曲率と格子模型

塩崎謙

August 10, 2025

Abstract

高次Berry曲率が有限値を取る，[1]の格子模型についてのメモ．

0次元

球面 S^2 上の族のハミルトニアンであって，基底状態のChern数が1である模型は， $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{n}^2 = 1$ を単位ベクトルとして，

$$H_{0D}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1)$$

ここで， $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ はPauli行列．

1次元

サイト $j \in \mathbb{Z}$ にスピン1/2の自由度を2つ， σ_j^L, σ_j^R をスピン演算子とする．

$$(\mathbf{n}, n_4) \in S^3, \quad \mathbf{n}^2 + n_4^2 = 1 \quad (2)$$

を S^3 の座標として，

$$H_{1D}(\mathbf{n}, n_4) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{n} \cdot (-\sigma_j^L + \sigma_j^R) + |n_4| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \begin{cases} \sigma_j^L \cdot \sigma_j^R & (n_4 \leq 0) \\ \sigma_j^R \cdot \sigma_{j+1}^L & (n_4 \geq 0) \end{cases} \quad (3)$$

この模型はBerry曲率の積分値が1である：

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sum_{\Delta^3 \in S^3} F^{(3)}(\Delta^3) = 1. \quad (4)$$

- (3)において，第1項目は第2項目の反強磁性相互作用と両立するように異符号で取る必要がある．実際，

$$H_{1D}(\mathbf{n}, n_4) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{n} \cdot (\sigma_j^L + \sigma_j^R) + |n_4| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \begin{cases} \sigma_j^L \cdot \sigma_j^R & (n_4 \leq 0) \\ \sigma_j^R \cdot \sigma_{j+1}^L & (n_4 \geq 0) \end{cases} \quad (5)$$

は S^3 上においてどこかでギャップが閉じる．

- スピン1/2に限る必要はなく，一般のスピン S に対しても(3)と同じ模型はトポロジカル数 $\nu = 2S$ を与える模型となる．

2次元

2次元模型も同様．各サイトに4つのスピン1/2からなる自由度を考え，それぞれPauli行列を $\sigma_j^1, \sigma_j^2, \sigma_j^3, \sigma_j^4$ ， $j \in \mathbb{Z}^2$ とする．

$$(\mathbf{n}, n_4, n_5) \in S^4, \quad \mathbf{n}^2 + n_4^2 + n_5^2 = 1 \quad (6)$$

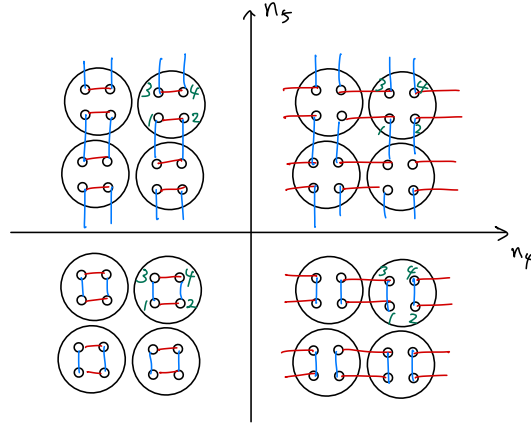


Figure 1: 2次元模型

を S^4 の座標として,

$$H_{2D}(\mathbf{n}, n_4, n_5) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{n} \cdot (-\sigma_j^1 + \sigma_j^2 + \sigma_j^3 - \sigma_j^4) \quad (7)$$

$$+ |n_4| \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \begin{cases} \sigma_j^1 \cdot \sigma_j^2 + \sigma_j^3 \cdot \sigma_j^4 & (n_4 \leq 0) \\ \sigma_j^2 \cdot \sigma_{j+\hat{x}}^1 + \sigma_j^4 \cdot \sigma_{j+\hat{x}}^3 & (n_4 \geq 0) \end{cases} \quad (8)$$

$$+ |n_5| \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \begin{cases} \sigma_j^1 \cdot \sigma_j^3 + \sigma_j^2 \cdot \sigma_j^4 & (n_5 \leq 0) \\ \sigma_j^3 \cdot \sigma_{j+\hat{y}}^1 + \sigma_j^4 \cdot \sigma_{j+\hat{y}}^2 & (n_5 \geq 0) \end{cases} \quad (9)$$

第2項については、図2を見よ。この模型は任意のパラメータ点 $(\mathbf{n}, n_4, n_5)$ において4つの1/2スピンの問題であるから容易に解くことができる。とくに、基底状態は一意で有限のエネルギーギャップがある。また、Berry曲率の積分値は1である：

$$\nu = \sum_{\Delta^4 \in S^4} F^{(4)}(\Delta^4) = 1. \quad (10)$$

一般の空間次元

空間3次元以上への一般化も容易であろう。たとえば空間3次元においては、各サイトにおいて $2^3 = 8$ 個のspin 1/2自由度を取り、ハミルトニアンを

$$H_{dD}(\mathbf{n}, n_4, n_5, n_6) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} \mathbf{n} \cdot (-\sigma_j^1 + \sigma_j^2 + \sigma_j^3 - \sigma_j^4 + \sigma_j^5 - \sigma_j^6 - \sigma_j^7 + \sigma_j^8) \quad (11)$$

$$+ |n_4| \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} \begin{cases} \sigma_j^1 \cdot \sigma_j^2 + \sigma_j^3 \cdot \sigma_j^4 + \sigma_j^5 \cdot \sigma_j^6 + \sigma_j^7 \cdot \sigma_j^8 & (n_4 \leq 0) \\ \sigma_j^2 \cdot \sigma_{j+\hat{x}}^1 + \sigma_j^4 \cdot \sigma_{j+\hat{x}}^3 + \sigma_j^6 \cdot \sigma_{j+\hat{x}}^5 + \sigma_j^8 \cdot \sigma_{j+\hat{x}}^7 & (n_4 \geq 0) \end{cases} \quad (12)$$

$$+ |n_5| \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} \begin{cases} \sigma_j^1 \cdot \sigma_j^3 + \sigma_j^2 \cdot \sigma_j^4 + \sigma_j^5 \cdot \sigma_j^7 + \sigma_j^6 \cdot \sigma_j^8 & (n_5 \leq 0) \\ \sigma_j^3 \cdot \sigma_{j+\hat{y}}^1 + \sigma_j^4 \cdot \sigma_{j+\hat{y}}^2 + \sigma_j^7 \cdot \sigma_{j+\hat{y}}^5 + \sigma_j^8 \cdot \sigma_{j+\hat{y}}^6 & (n_5 \geq 0) \end{cases} \quad (13)$$

$$+ |n_6| \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} \begin{cases} \sigma_j^1 \cdot \sigma_j^5 + \sigma_j^2 \cdot \sigma_j^6 + \sigma_j^3 \cdot \sigma_j^7 + \sigma_j^4 \cdot \sigma_j^8 & (n_6 \leq 0) \\ \sigma_j^5 \cdot \sigma_{j+\hat{z}}^1 + \sigma_j^6 \cdot \sigma_{j+\hat{z}}^2 + \sigma_j^7 \cdot \sigma_{j+\hat{z}}^3 + \sigma_j^8 \cdot \sigma_{j+\hat{z}}^4 & (n_6 \geq 0) \end{cases} \quad (14)$$

とする。

References

- [1] Xueda Wen, Marvin Qi, Agnès Beaudry, Juan Moreno, Markus J. Pflaum, Daniel Spiegel, Ashvin Vishwanath, Michael Hermele, *Flow of (higher) Berry curvature and bulk-boundary correspondence in parametrized quantum systems*, arXiv:2112.07748.