誘導表現と既約分解について

塩崎　謙

June 23, 2021

Gを有限群，$\phi : G \to \{1,-1\}$によって群元$g \in G$のユニタリー，反ユニタリー性を指定する．ユニタリーな部分群を下付き添字を用いて$G_0 = \{g \in G | \phi_g = 1\}$と書く．省略記号

$$x^{\phi_g} = \begin{cases} x & (\phi_g = 1) \\ x^* & (\phi_g = -1) \end{cases}, \quad x^{-\phi_g} = \begin{cases} x^* & (\phi_g = 1) \\ x & (\phi_g = -1) \end{cases} \tag{1}$$

を導入する．

表現，既約表現を$\alpha, \beta, \dots,$と書き，表現行列をD_g^α，指標をχ_g^α などと書く．表現の等価性を$\alpha \sim \beta$などと書き，$\alpha \sim \beta$は$\chi_g^\alpha = \chi_g^\beta$と等価である．

乗数系を$z_{g,h} \in U(1)$, $\hat{g}\hat{h} = z_{g,h}\widehat{gh}, g, h \in G$と書く．2コサイクル条件

$$z_{h,k}^{\phi_g} z_{gh,k}^{-1} z_{g,hk} z_{g,h}^{-1} = 1 \tag{2}$$

に従う．

- 表現のマップ．
  $H \subset G$とする．H_0の表現αに対して，表現基底を$\{i\}_{i=1,\dots,\dim\alpha}$とする．

  $$\hat{g}\,|j\rangle = \sum_{i=1}^{\dim\alpha} |i\rangle\,[D_g^\alpha]_{ij}, \quad g \in H_0. \tag{3}$$

  $h \in G$に対して，hによってマップされたhH_0h^{-1}上の表現$h\alpha$の表現基底を形式的に$\{\hat{h}\,|i\rangle\}_{i=1,\dots,\dim\alpha}$とする．表現行列は

  $$\hat{g}\hat{h}\,|j\rangle = \frac{z_{g,h}}{z_{h,h^{-1}gh}} \hat{h}\widehat{h^{-1}gh}\,|j\rangle = \frac{z_{g,h}}{z_{h,h^{-1}gh}} \hat{h} \sum_{i=1}^{\dim\alpha} |i\rangle\,[D_{h^{-1}gh}^\alpha]_{ij}, \quad g \in hH_0h^{-1}, \tag{4}$$

  より，

  $$D_{g \in hH_0h^{-1}}^{h\alpha} = \frac{z_{g,h}}{z_{h,h^{-1}gh}} [D_{h^{-1}gh}^\alpha]^{\phi_h}. \tag{5}$$

  特に，マップされた指標の表式

  $$\boxed{\chi_{g \in hH_0h^{-1}}^{h\alpha} = \frac{z_{g,h}}{z_{h,h^{-1}gh}} [\chi_{h^{-1}gh}^\alpha]^{\phi_h},} \tag{6}$$

  あるいは等価な表式

  $$\boxed{\chi_{hgh^{-1}}^{h\alpha} = \frac{z_{hgh^{-1},h}}{z_{h,g}} [\chi_g^\alpha]^{\phi_h}, \quad g \in H_0,} \tag{7}$$

を得る．

特に，$k \in H_0$によってH_0の表現αをマップすると，$k\alpha$はαと等価だから，[1]

$$\boxed{\chi_g^{k\alpha} = \frac{z_{g,k}}{z_{k,k^{-1}gk}} \chi_{k^{-1}gk}^{\alpha} = \chi_g^{\alpha}, \quad g, k \in H_0} \tag{8}$$

が成立する．

- 表現のマップは群構造を保つこと．

  αをH_0の表現とする．次が成立する．

$$\boxed{h(k\alpha) = (hk)\alpha, \quad h, k \in G.} \tag{9}$$

実際，

$$\begin{align}
\chi_g^{h(k\alpha)} &= z_{g,h} z_{h,h^{-1}gh}^{-1} (\chi_{h^{-1}gh}^{k\alpha})^{\phi_h} = z_{g,h} z_{h,h^{-1}gh}^{-1} (z_{h^{-1}gh,k} z_{k,k^{-1}h^{-1}ghk}^{-1} (\chi_{k^{-1}h^{-1}ghk}^{\alpha})^{\phi_k})^{\phi_h} \tag{10}\\
&= z_{g,h} z_{h,h^{-1}gh}^{-1} z_{h^{-1}gh,k}^{\phi_h} z_{k,(hk)^{-1}ghk}^{-\phi_h} (\chi_{(hk)^{-1}ghk}^{\alpha})^{\phi_{hk}}. \tag{11}
\end{align}$$

ここで，2コサイクル条件

$$z_{h^{-1}gh,k}^{\phi_h} z_{gh,k}^{-1} z_{h,h^{-1}ghk} z_{h,h^{-1}gh}^{-1} = 1 \tag{12}$$

より

$$\chi_g^{h(k\alpha)} = z_{gh,k} z_{h,h^{-1}ghk}^{-1} z_{g,h} z_{k,(hk)^{-1}ghk}^{-\phi_h} (\chi_{(hk)^{-1}ghk}^{\alpha})^{\phi_{hk}}. \tag{13}$$

さらに 2 コサイクル条件

$$z_{k,(hk)^{-1}ghk}^{\phi_h} z_{hk,(hk)^{-1}ghk}^{-1} z_{h,h^{-1}ghk} z_{h,k}^{-1} = 1 \tag{14}$$

より，

$$\chi_g^{h(k\alpha)} = z_{hk,(hk)^{-1}ghk}^{-1} z_{h,k}^{-1} z_{gh,k} z_{g,h} (\chi_{(hk)^{-1}ghk}^{\alpha})^{\phi_{hk}}. \tag{15}$$

最後に，$\phi_g = 1$に注意して， 2 コサイクル条件

$$z_{h,k} z_{gh,k}^{-1} z_{g,hk} z_{g,h}^{-1} = 1 \tag{16}$$

より，

$$\chi_g^{h(k\alpha)} = z_{hk,(hk)^{-1}ghk}^{-1} z_{g,hk} (\chi_{(hk)^{-1}ghk}^{\alpha})^{\phi_{hk}} = \chi_g^{(hk)\alpha} \tag{17}$$

を得る．

特に，hの選び方は$h \mapsto hk, k \in H_0$の任意性があるが， $k \in H_0$に対して$k\alpha \sim \alpha$に注意すると，マップされた指標は$h \in G$の選び方に依存しない．つまり，

$$\boxed{hk\alpha = h\alpha, \quad k \in H_0} \tag{18}$$

が成立する．

- 表現のマップと内積．

  H_0の表現α, βの内積を

$$\boxed{(\alpha, \beta) := \frac{1}{|H_0|} \sum_{g \in H_0} (\chi_g^{\alpha})^* \chi_g^{\beta} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.} \tag{19}$$

[1] $D_{g \in G_0}^{\alpha} D_k^{\alpha} = \frac{z_{g,k}}{z_{k,k^{-1}gk}} D_k^{\alpha} D_{k^{-1}gk}^{\alpha}$ より直ちに示される．

と定義する． $h \in G$による表現のマップと内積は可換である．

$$\boxed{(h\alpha, h\beta) = (\alpha, \beta).} \tag{20}$$

実際，

$$(h\alpha, h\beta) = \frac{1}{|H_0|} \sum_{g \in hH_0h^{-1}} (\chi_g^{h\alpha})^* \chi_g^{h\beta} \tag{21}$$

$$= \frac{1}{|H_0|} \sum_{g \in hH_0h^{-1}} (\frac{z_{g,h}}{z_{h,h^{-1}gh}} (\chi^\alpha_{h^{-1}gh})^{\phi_h})^* \frac{z_{g,h}}{z_{h,h^{-1}gh}} (\chi^\beta_{h^{-1}gh})^{\phi_h}. \quad = (\alpha, \beta)^{\phi_h} = (\alpha, \beta). \tag{22}$$

- 表現の制限.
  G_0の表現αに対して，$H_0 \subset G_0$への制限を$\alpha|_{H_0}$と書く．
- 表現の制限と表現のマップの可換性.
  表現の制限と表現なマップは可換である：

$$\boxed{h(\alpha|_{H_0}) = (h\alpha)|_{hH_0h^{-1}}.} \tag{23}$$

実際，$h\alpha$の指標は

$$\chi^{h\alpha}_{g \in hH_0h^{-1}} = \frac{z_{g,h}}{z_{h,h^{-1}gh}} (\chi^\alpha_{h^{-1}gh \in H_0})^{\phi_h} \tag{24}$$

であるが，右辺は制限$\alpha|_{H_0}$の$h \in G$によるマップに他ならない．

- 誘導表現.
  $H_0 \subset G$の左コセット分解を

$$G = \coprod_{a=1}^{|G/H_0|} h_a H_0 \tag{25}$$

と書く．$h_1 = e$と選ぶことができる． H_0の表現αに対して，Gへの誘導表現を形式的に

$$\mathrm{Ind}\alpha = \bigoplus_{a=1}^{|G/H_0|} h_a \alpha \tag{26}$$

と書く． h_aは反ユニタリーな群元を含み得ることに注意． H_0の表現αの表現基底を$\{i\}_{i=1}^{\dim \alpha}$とすると，誘導表現の表現基底は形式的に$\{\hat{h}_a |i\rangle\}_{i=1,\dots,\dim\alpha, a=1,\dots,|G/H_0|}$で与えられる．このとき，$g \in G_0$に対して，

$$\hat{g}\hat{h}_a |i\rangle = z_{g,h_a} \widehat{gh_a} |i\rangle \tag{27}$$

である．$gh_a = h_b g', g' \in H_0$と書くと，

$$\hat{g}\hat{h}_a |j\rangle = z_{g,h_a} \widehat{h_b g'} |j\rangle = \frac{z_{g,h_a}}{z_{h_b,g'}} \hat{h}_b \hat{g}' |j\rangle = \frac{z_{g,h_a}}{z_{h_b,g'}} (\hat{h}_b |i\rangle) [D^\alpha_{g'}]^{\phi_{h_b}}_{ij} = \frac{z_{g,h_a}}{z_{h_b, h_b^{-1} g h_a}} (\hat{h}_b |i\rangle) [D^\alpha_{h_b^{-1} g h_a}]^{\phi_{h_b}}_{ij}. \tag{28}$$

誘導表現の指標へは$h_a = h_b$，つまり$gh_a \in h_a H_0$のみ寄与する．

$$\boxed{\chi^{\mathrm{Ind}\alpha}_{g \in G_0} = \sum_{a=1}^{|G/H_0|} \delta_{g \in h_a H_0 h_a^{-1}} \chi_g^{h_a \alpha}.} \tag{29}$$

G_0の表現βとの内積を計算する．表現$h_a\alpha$からの寄与は

$$\frac{1}{|G_0|}\sum_{g\in G_0}(\chi_g^\beta)^*\delta_{g\in h_aH_0h_a^{-1}}\chi_g^{h_a\alpha}=\frac{1}{|G_0|}\sum_{g\in h_aH_0h_a^{-1}}(\chi_g^\beta)^*\chi_g^{h_a\alpha}=\frac{|H_0|}{|G_0|}(\beta|_{h_aH_0h_a^{-1}},h_a\alpha) \tag{30}$$

となり，βのH_0への制限との内積で書くことができる．従って，誘導表現とG_0の表現の内積は，

$$\boxed{(\beta,\mathrm{Ind}\alpha)=\frac{|H_0|}{|G_0|}\sum_{a=1}^{|G/H_0|}(\beta|_{h_aH_0h_a^{-1}},h_a\alpha),} \tag{31}$$

つまり，各aに対してβを部分群$h_aH_0h_a^{-1}$に制限して$h_a\alpha$との内積を取ったものの和，で与えられる．従って，誘導表現の既約分解は，G_0の既約表現βの，$h_aH_0h_a^{-1}$の既約表現$h_a\alpha$に対する分解行列が与えられていると，計算できる．

さらに，内積と表現のマップの可換性に注意すると，

$$(\beta,\mathrm{Ind}\alpha)=\frac{|H_0|}{|G_0|}\sum_{a=1}^{|G/H_0|}((h_a^{-1}\beta)|_{H_0},\alpha) \tag{32}$$

と書くことができる． h_aがユニタリーの場合は$h_a\beta\sim\beta$より， $((h_a^{-1}\beta)|_{H_0},\alpha)=(\beta|_{H_0},\alpha)$となり$a$依存性が消える．一方で$h_a$は反ユニタリーな場合は一般には$h_a\beta$と$\beta$が非等価な表現である場合もあるが，反ユニタリーな代表元$T\in G,\phi_T=-1$にのみ依存する．$G=G_0\coprod TG_0$と書くと，

$$(\beta,\mathrm{Ind}\alpha)=\frac{|H_0|}{|G_0|}(\sum_{h_a\in G_0}+\sum_{h_a\in TG_0})((h_a^{-1}\beta)|_{H_0},\alpha) \tag{33}$$

$$=(\beta|_{H_0},\alpha)+((T^{-1}\beta)|_{H_0},\alpha), \tag{34}$$

あるいは，$T^{-1}=TT^{-2},T^{-2}\in G_0$に注意すると，

$$\boxed{(\beta,\mathrm{Ind}\alpha)=((\beta\oplus T\beta)|_{H_0},\alpha)} \tag{35}$$

を得る．また，

$$\boxed{(\beta,\mathrm{Ind}\alpha)=(\beta|_{H_0},\alpha)+(\beta|_{TH_0T^{-1}},T\alpha)} \tag{36}$$

と書くこともできる．（Frobenius相反律として知られる関係式である．）