相対K群の定義についてのメモ

塩崎　謙

January 14, 2022

相対K群$K^0(X,Y)$の定義を，組$(H_0(x),H_1(x))$について，

$$H_0(x)\text{と}H_1(x)\text{が}Y\text{上でホモトピー同値} \tag{1}$$

とするのは間違っているとの指摘を受け，これが問題がある例についてメモする．[1] 相対K群の正しい定義のひとつは，

$$x\in Y\text{において}H_0(x)=H_1(x) \tag{2}$$

とすることらしい．

事実として，$K^0(D^2,\partial D^2)\cong\mathbb{Z}$である．$D^2$を$(r,\theta)$で座標を入れて，$0\leq r\leq 1$とする．(2)の定義を用いたとき，$m(k)$を$m(0)=1,m(k>\epsilon)=0$なる関数として，

$$H_0(r,\theta)=r\cos\theta\sigma_x+r\sin\theta\sigma_y+\sqrt{1-r^2}\sigma_z, \tag{3}$$
$$H_1(r,\theta)=r\cos\theta\sigma_x+r\sin\theta\sigma_y-\sqrt{1-r^2}\sigma_z, \tag{4}$$

が生成子．このとき(1)を定義とすると上記の$H_0(r,\theta),H_1(r,\theta)$が$D^2$上でホモトピー同値であることを示す．$H=\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\sigma}$と書いたときに，$\boldsymbol{h}/|\boldsymbol{h}|\in S^2$として，$H$を球面$S^2$の点とみなす．すると$D^2$からの像は，$H_0(r,\theta)$は北半球面を，$H_1(r,\theta)$は南半球面を走る．特に，境界$\partial D^2\cong S^1$上においては，球面$S^2$上の赤道を走る．$S^1$は$S^2$に巻き付かないので，任意の 2 つのマップ$\partial D^2\to S^2$はホモトピー同値．この点に注意すると，例えば

$$H_0(r,\theta,t)=(1-t)r\cos\theta\sigma_x+(1-t)r\sin\theta\sigma_y+\sqrt{1-(1-t)^2r^2}\sigma_z\xrightarrow{t\to 1}\sigma_z, \tag{5}$$
$$H_1(r,\theta,t)=(1-t)r\cos\theta\sigma_x+(1-t)r\sin\theta\sigma_y-\sqrt{1-(1-t)^2r^2}\sigma_z\xrightarrow{t\to 1}-\sigma_z, \tag{6}$$

とすると，$H_0(r,\theta),H_1(r,\theta)$はそれぞれ定数$\sigma_z,-\sigma_z$にホモトピー同値．さらに，定数マップ$\sigma_z$と$-\sigma_z$はホモトピー同値なので，(1)の定義を採用すると，$H_0(r,\theta)$と$H_1(r,\theta)$はホモトピー同値となり，相対K群$K^0(D^2,\partial D^2)$の非自明元とならない．

[1]山下真由子氏に指摘して頂きました．ありがとうございます．