

3次元巻き付き数の格子近似計算

塩崎 謙

May 19, 2023

Abstract

1 巻き付き数, WZW項

2次元トーラス T^2 から $U(n)$ へのマップを考える.

$$g : T^2 \rightarrow U(n), \quad (k_x, k_y) \rightarrow g(k_x, k_y). \quad (1)$$

1次元巻き付き数 $W_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint d \log \det g$ がゼロであれば, 1点 $g_0 \in U(n)$ へのホモトピー $\tilde{g}(k_x, k_y, t \in [0, 1])$ が存在する.

$$\tilde{g}(k_x, k_y, 0) = g(k_x, k_y), \quad \tilde{g}(k_x, k_y, 1) = g_0. \quad (2)$$

このとき, WZW項は以下で定義される.

$$\Theta = \frac{1}{12\pi} \int_{T^2 \times [0, 1]} \text{tr} [\tilde{g}^{-1} d\tilde{g}]^3 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \quad (3)$$

ここで,

$$\omega = \frac{1}{24\pi^2} \text{tr} [g^{-1} dg]^3 \quad (4)$$

は $U(n)$ の体積要素であり, (向き付けされた) 閉じた3次元空間 M_3 に対して

$$W_3 = \frac{1}{24\pi^2} \int_{M_3} \text{tr} [g^{-1} dg]^3 \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

は整数である. WZW項 Θ のトーラス T^2 の格子近似による計算手法を与えることがこのノートの目的である.

- 1次元巻き付き数 W_1 が非ゼロのとき, WZW項は定義できない? WZW項の値を変化させずに3次元のハミルトニアンにマップできれば, CS3形式として定義可能だと思われるが..

2 $U(n)$ 上の点集合から特異チェーンの構成する方法

2.1 2点

一般に, $U(n)$ における2点 g_0, g_1 を繋ぐパスのひとつは以下のように構成できる. $U(n)$ 行列

$$g_1 g_0^{-1} \quad (6)$$

を対角化する.

$$g_1 g_0^{-1} = U \Lambda U^\dagger, \quad \Lambda = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}). \quad (7)$$

全ての j について $e^{i\theta_j} \neq -1$ であれば, $\text{Arg}\Lambda = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$, $|\theta_j| < \pi$ が一意的に定まる. このとき, エルミート行列

$$h_{01} = U(\text{Arg}\Lambda)U^\dagger \quad (8)$$

が定まる.

$$g_1 g_0^{-1} = e^{ih_{01}} \quad (9)$$

である. g_0, g_1 を繋ぐパスのひとつ $g_{01}(t)$ は

$$g_{01}(t) = e^{it h_{01}} g_0, \quad t \in [0, 1] \quad (10)$$

で与えられる.

g_0, g_1 の順番を入れ替えて構成されたパス $g_{10}(t)$ は $g_{01}(t)$ と同一か? $g_0 g_1^{-1} = e^{ih_{10}} = e^{-ih_{01}}$ に注意すると, $g_{10}(t) = e^{-it h_{01}} g_1$ であるが, $g_{10}(1-t) = e^{-i(1-t)h_{01}} g_1 = e^{it h_{01}} e^{-ih_{01}} g_1 = e^{it h_{01}} (g_1 g_0^{-1})^{-1} g_1 = e^{it h_{01}} g_0 = g_{01}(t)$ より, 逆向きのパスとなる.

- $g_{01}(t)$ は測地線?

2.2 3点

$U(n)$ 上の3点 g_0, g_1, g_2 を頂点として持つ特異2チェーン $\Delta^2 \rightarrow U(n)$ の構成方法の一つは, g_0 と $g_{12}(t)$ を繋ぐパスを与えることによって得られる. つまり,

$$g_{12}(t)g_0^{-1} = e^{it h_{12}} g_1 g_0^{-1} = e^{it h_{12}} e^{ih_{01}} =: e^{ih_{012}(t)} \quad (11)$$

で決まるエルミート行列 $h_{012}(t)$ を導入し,

$$g_{012}(s, t) := e^{is h_{012}(t)} g_0, \quad 0 \leq s, t \leq 1, \quad (12)$$

と定義する.

$$e^{ih_{012}(0)} = g_1 g_0^{-1} = e^{ih_{01}}, \quad e^{ih_{012}(1)} = g_2 g_0^{-1} = e^{ih_{02}} \quad (13)$$

に注意. また, $g_2 g_1^{-1} g_1 g_0^{-1} = g_2 g_0^{-1}$, つまり,

$$e^{ih_{12}} e^{ih_{01}} = e^{ih_{02}} \quad (14)$$

が成立することにも注意.

$$g_{012}(s, 0) = e^{is h_{012}(0)} g_0 = g_{01}(s), \quad (15)$$

$$g_{012}(s, 1) = e^{is h_{012}(1)} g_0 = g_{02}(s), \quad (16)$$

$$g_{012}(1, t) = e^{it h_{012}(t)} g_0 = g_{12}(t), \quad (17)$$

が成立する.

特異2チェーン $g_{012}(s, t)$ は, 頂点0, 1, 2の順番に依存することに注意.

2.3 4点

同様に, $U(n)$ 上の4点 g_0, g_1, g_2, g_3 を頂点とする特異3チェーン $\Delta^3 \rightarrow U(n)$ のひとつは, 2点 $g_0, g_{123}(s, t)$ を繋ぐパスを構成することにより得られる.

$$g_{123}(s, t)g_0^{-1} =: e^{ih_{0123}(s, t)} \quad (18)$$

によりエルミート行列 $h_{0123}(s, t)$ を定義する. 特異3チェーンを

$$g_{0123}(r, s, t) = e^{ir h_{0123}(s, t)} g_0, \quad 0 \leq r, s, t \leq 1 \quad (19)$$

と定義する.

$g_{0123}(r, s, t)$ も点 g_0, g_1, g_2, g_3 の順番に依存することに注意.

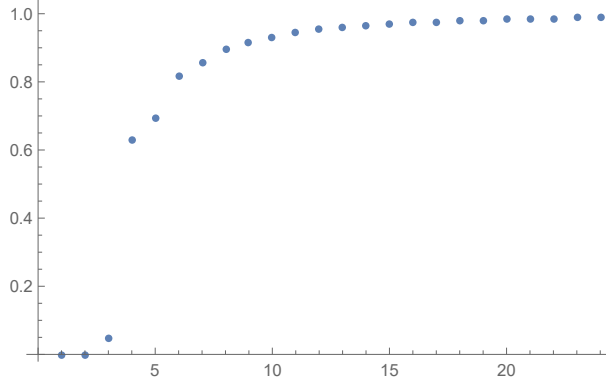


Figure 1: $m = 2$ の場合の結果. 格子点の数は L^3 であり, 横軸は L . 縦軸は巻き付き数 W_3 の離散近似の計算結果.

2.4 巻き付き数

$g: M_3 \rightarrow U(n)$ に対して, 巻き付き数 W_3 を離散近似により計算したい. M_3 の三角形分割 $|M_3|$ をひとつ取り, branching structure をひとつ固定する. すると, $|M_3|$ の任意の3胞体 $\Delta^3 = (0123)$ に対して, 前節の方法によってマップ $\Delta^3 \rightarrow U(n)$ が定まる. branching structure を固定しているため, 隣り合った3胞体の境界は同じ $U(n)$ の点にマップされることに注意. すると, 巻き付き数 W_3 は, 各3胞体 Δ^3 における体積要素 ω の積分の総和で与えられる.

$$W_3 = \sum_{\Delta^3 \in |M_3|} \sigma(\Delta^3) \int_{\Delta^3} \omega(g_{0123}), \quad (20)$$

$$\int_{\Delta^3} \omega(g_{0123}) := \frac{1}{24\pi^2} \int_{\Delta^3} \text{tr} [g_{0123}^{-1} dg_{0123}]^3. \quad (21)$$

ここで, $\sigma(\Delta^3) \in \{\pm 1\}$ は, Δ^3 の向きと M_3 の向きの一致/不一致を示す符号因子.

3 $U(n)$ の体積要素の離散近似

積分 $\int_{\Delta^3} \omega(g_{0123})$ を4頂点 $g_0, g_1, g_2, g_3 \in U(n)$ から簡単に計算できるか?

あるいは, 総和 $\sum_{\Delta^3} \sigma(\Delta^3) \int_{\Delta^3} \omega(g_{0123})$ が必ず整数値を取るような W_3 の他の離散近似計算方法が存在するか?

$$e^{ih_{0j}} = g_j g_0^{-1}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (22)$$

によって定まるエルミート行列 h_{01}, h_{02}, h_{03} を導入する.

$$\int_{\Delta^3} \omega(g_{0123}) \sim \frac{1}{24\pi^2} \frac{i}{2} \text{tr} [h_{01} [h_{02}, h_{03}]] \quad (23)$$

と近似できる.

しかし, 数値計算[1]をすると, 離散点の数 L を大きくすると W_3 に収束するが, 各 L において量子化はしなかった. 図1に結果を示す. ただし, $g(k_x, k_y, k_z)$ は

$$q = \sin k_x \sigma_x + \sin k_y \sigma_y + \sin k_z \sigma_z + i(\cos k_x + \cos k_y + \cos k_z + m), \quad (24)$$

として, 特異値分解により q をユニタリ化したものを用いた.

- $\text{tr} [g^{-1} dg]^3$ を素朴に離散近似して積分する計算方法も考えられるが, この手法と比べてどの程度精度が良いだろうか.

4 $SU(2)$ の場合の計算メモ

$$g = e^{i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2} = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}. \quad (25)$$

である.

$$\frac{1}{2}\text{tr}[g\boldsymbol{\sigma}_\mu] = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{n}) \quad (26)$$

より,

$$\frac{\theta}{2} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\text{tr}[g]\right), \quad (27)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{1}{2}\text{tr}[g\boldsymbol{\sigma}]}{i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\text{tr}[g\boldsymbol{\sigma}]}{i\sin\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\text{tr}[g]\right)} \quad (28)$$

であるから, エルミート行列は

$$h = \frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\text{tr}[g]\right)\frac{\frac{1}{2}\text{tr}[g\boldsymbol{\sigma}]}{i\sin\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\text{tr}[g]\right)}\cdot\boldsymbol{\sigma}. \quad (29)$$

で与えられる.

References

- [1] 3DWinding.nb