計算メモ．Chen-Gu-Liu-Wenのコサイクル模型はLevin-Gu模型と一致するか？

塩崎　謙

September 8, 2021

Abstract

コバウンダリーの自由度を用いても一致しなかった． Levin-Gu模型はString Net模型に基づいているらしく，String Net模型の構成方法を調べるべき．

1　Levin-Gu模型

三角格子の頂点にスピン1/2自由度を置く．自明なハミルトニアンは

$$H_0 = -\sum_j \sigma_j^x. \tag{1}$$

基底状態はスピンアップとダウンの任意の配位の重ね合わせ状態.

$$|\Psi_0\rangle = \sum_\sigma |\sigma\rangle . \tag{2}$$

規格化係数は気にしない． Levin-Gu模型の基底状態は，磁壁のloopに対して位相(-1)を与える [2].

$$|\Psi_1\rangle = \sum_\sigma (-1)^{N_l} |\sigma\rangle . \tag{3}$$

ここで，N_lはループの数． Levin-Guの基底状態は，自明状態に対して，以下の局所ユニタリ変換（局所ハミルトニアンの有限時間時間発展）を作用させることにより得られる．(Appendix A in [2])

$$U_\theta = \prod_{<pqr>} e^{i\theta(3\sigma_p^z\sigma_q^z\sigma_r^z - \sigma_p^z - \sigma_q^z - \sigma_r^z)}. \tag{4}$$

ここで，$< pqr >$は全ての三角形を走る．特に，$\theta = \frac{\pi}{24}$がLevin-Gu模型に対応する．（$\mathbb{Z}_2$対称性を確認.）あるいは，以下のようにも書ける [3].

$$W_{\mathbb{Z}_2} = \prod_j e^{-i\frac{\pi}{12}\sigma_j^z \sum_{<ll'>}^j (\frac{1-\sigma_l^z\sigma_{l'}^z}{2})}. \tag{5}$$

ここで，$< ll' >$はサイトjを含む三角形を走る． ([3]では$e^{-i\frac{\pi}{6}\cdots}$とあるが，間違いだろう．）ハミルトニアンは

$$B_j = U_\theta \sigma_j^x U_\theta^{-1} = -\sigma_j^x e^{i\frac{\pi}{2}\sum_{pq}^j \frac{1-\sigma_p^z\sigma_q^z}{2}} \tag{6}$$

より，

$$H_1 = -\sum_j B_j. \tag{7}$$

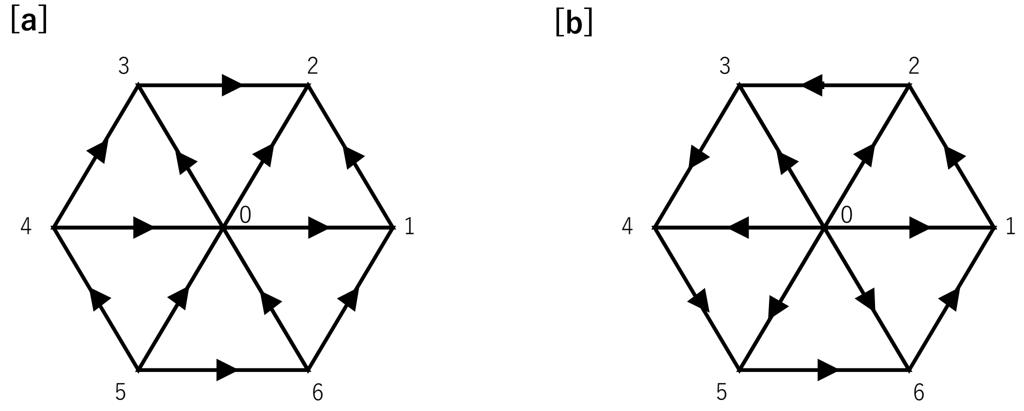

Figure 1

2　コサイクル模型

$G=\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$とする．3コサイクルを

$$\omega(a,b,c)=(-1)^{abc} \tag{8}$$

とする．一様コサイクルは

$$\nu(0,a,b,c)=\omega(a,-a+b,-b+c)=(-1)^{a(-a+b)(-b+c)}=\begin{cases}-1 & (a=1,b=0,c=1),\\ 1 & (\mathrm{else}).\end{cases} \tag{9}$$

ただし，基準群元を$g_*=0$と選んだ．コサイクル模型におけるユニタリ変換は [1]

$$U(\nu)=\sum_{\{a_j\}}\prod_{\Delta^2}\nu(0,a_0,a_1,a_2)^{\mathrm{sign}\Delta^2}\left|\{a_j\}\right\rangle\left\langle\{a_j\}\right| \tag{10}$$

ここで，各2単体において，

$$\sum_{a_0,a_1,a_2}\nu(0,a_0,a_1,a_2)\left|a_0a_1a_2\right\rangle\left\langle a_0a_1a_2\right|=(-1)^{\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}} \tag{11}$$

に注意すると，

$$U(\nu)=\prod_{\Delta^2}(-1)^{\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}} \tag{12}$$

と書くことができる．

サイト0の近傍サイトの番号を図のように取る．branching ruleを並進対称性を満たすように図[a]のように取ると，直接計算より

$$
\begin{aligned}
&U(\nu)\sigma_0^x U(\nu)^{-1} \\
&= e^{\pi i\left[\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}-\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_3^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}+\frac{1-\sigma_4^z}{2}\frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_3^z}{2}-\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_4^z}{2}\frac{1-\sigma_0^z}{2}+\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_6^z}{2}\frac{1-\sigma_0^z}{2}-\frac{1-\sigma_6^z}{2}\frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_1^z}{2}\right]} \\
&\quad \sigma_0^x e^{-\pi i\left[\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}-\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_3^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}+\frac{1-\sigma_4^z}{2}\frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_3^z}{2}-\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_4^z}{2}\frac{1-\sigma_0^z}{2}+\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_6^z}{2}\frac{1-\sigma_0^z}{2}-\frac{1-\sigma_6^z}{2}\frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_1^z}{2}\right]} \\
&= \sigma_0^x \exp \pi i \Bigg[\frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}-\frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_3^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}+\frac{1-\sigma_4^z}{2}\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_3^z}{2} \\
&\qquad\qquad -\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_4^z}{2}\frac{1+\sigma_0^z}{2}+\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_6^z}{2}\frac{1+\sigma_0^z}{2}-\frac{1-\sigma_6^z}{2}\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_1^z}{2} \\
&\qquad\qquad -\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}+\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_3^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}-\frac{1-\sigma_4^z}{2}\frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_3^z}{2} \\
&\qquad\qquad +\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_4^z}{2}\frac{1-\sigma_0^z}{2}-\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_6^z}{2}\frac{1-\sigma_0^z}{2}+\frac{1-\sigma_6^z}{2}\frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_1^z}{2}\Bigg] \\
&= \sigma_0^x \exp \pi i \sigma_0^z \left[\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}-\frac{1+\sigma_3^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}-\frac{1-\sigma_4^z}{2}\frac{1-\sigma_3^z}{2}-\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_4^z}{2}+\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_6^z}{2}+\frac{1-\sigma_6^z}{2}\frac{1-\sigma_1^z}{2}\right] \\
&= \sigma_0^x \exp \pi i \left[\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}-\frac{1+\sigma_3^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}-\frac{1-\sigma_4^z}{2}\frac{1-\sigma_3^z}{2}-\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_4^z}{2}+\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_6^z}{2}+\frac{1-\sigma_6^z}{2}\frac{1-\sigma_1^z}{2}\right].
\end{aligned}
$$

ここで，括弧の中身は整数値を取り，$\sigma_0^z = \pm 1$に依存しないことを用いた．さらに括弧の中身を展開して

$$
U(\nu)\sigma_0^x U(\nu)^{-1} = \sigma_0^x \exp \frac{\pi i}{2}\left[\frac{1-\sigma_1^z\sigma_2^z}{2}-\frac{1-\sigma_2^z\sigma_3^z}{2}-\frac{1+\sigma_3^z\sigma_4^z}{2}-\frac{1-\sigma_4^z\sigma_5^z}{2}+\frac{1-\sigma_5^z\sigma_6^z}{2}+\frac{1+\sigma_6^z\sigma_1^z}{2}\right] \tag{13}
$$

となり，Levin-Gu模型

$$
B_0 = -\sigma_0^x i^{\frac{1-\sigma_1^z\sigma_2^z}{2}+\frac{1-\sigma_2^z\sigma_3^z}{2}+\frac{1-\sigma_3^z\sigma_4^z}{2}+\frac{1-\sigma_4^z\sigma_5^z}{2}+\frac{1-\sigma_5^z\sigma_6^z}{2}+\frac{1-\sigma_6^z\sigma_1^z}{2}} \tag{14}
$$

とは表式が異なる．

$$
\begin{aligned}
&U(\nu)\sigma_0^x U(\nu)^{-1} \\
&= \sigma_0^x \exp \pi i \left[\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}+\frac{1+\sigma_3^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2}-\frac{1-\sigma_4^z}{2}\frac{1-\sigma_3^z}{2}+\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_4^z}{2}+\frac{1-\sigma_5^z}{2}\frac{1+\sigma_6^z}{2}-\frac{1-\sigma_6^z}{2}\frac{1-\sigma_1^z}{2}\right] \\
&= \sigma_0^x \exp \frac{\pi i}{2}\left[\frac{1-\sigma_1^z\sigma_2^z}{2}+\frac{1-\sigma_2^z\sigma_3^z}{2}-\frac{1+\sigma_3^z\sigma_4^z}{2}+\frac{1-\sigma_4^z\sigma_5^z}{2}+\frac{1-\sigma_5^z\sigma_6^z}{2}-\frac{1+\sigma_6^z\sigma_1^z}{2}+\sigma_1^z-\sigma_2^z+\sigma_3^z-\sigma_4^z+\sigma_5^z-\sigma_6^z\right]
\end{aligned}
$$

とも書くことができるが，この差は3コバウンダリで実現できるか？

3　与えられた3コサイクルに対して$U(\nu)\sigma_0^x U(\nu)^{-1}$を計算する

コサイクル条件をMathematicaで直接解くと，

$$
Z^3(\mathbb{Z}_2, U(1)) = \mathbb{Z}_2 \times U(1) \times U(1) \tag{15}
$$

を得る．$\omega(101)=x, \omega(110)=y$と置くと，

$$
\begin{align}
\omega(000) &= 1, \tag{16}\\
\omega(001) &= xy, \tag{17}\\
\omega(010) &= 1, \tag{18}\\
\omega(011) &= x^{-1}y^{-1}, \tag{19}\\
\omega(100) &= y^{-1}, \tag{20}\\
\omega(111) &= \pm x^{-1}. \tag{21}
\end{align}
$$

今は非自明相に興味があるので，$\omega(111)=-x^{-1}$とする．一様コサイクルは

$$
\nu(0,a,b,c) = \omega(a,-a+b,-b+c) \tag{22}
$$

より，

$$
\begin{align}
\nu(0000) &= 1, \tag{23}\\
\nu(0001) &= xy, \tag{24}\\
\nu(0010) &= x^{-1}y^{-1}, \tag{25}\\
\nu(0011) &= 1, \tag{26}\\
\nu(0100) &= y, \tag{27}\\
\nu(0101) &= -x^{-1}, \tag{28}\\
\nu(0110) &= x, \tag{29}\\
\nu(0111) &= y^{-1}. \tag{30}
\end{align}
$$

これから，

$$
\begin{align}
\sum_{a_0a_1a_2} \nu(0a_0a_1a_2)\left|a_0a_1a_2\right\rangle\left\langle a_0a_1a_2\right| = \left|000\right\rangle\left\langle 000\right| + xy\left|001\right\rangle\left\langle 001\right| + x^{-1}y^{-1}\left|010\right\rangle\left\langle 010\right| + \left|011\right\rangle\left\langle 011\right| \tag{31}\\
+ y\left|100\right\rangle\left\langle 100\right| - x^{-1}\left|101\right\rangle\left\langle 101\right| + x\left|110\right\rangle\left\langle 110\right| + y^{-1}\left|111\right\rangle\left\langle 111\right|. \tag{32}
\end{align}
$$

無理やりスピン演算子で表現すると

$$
\begin{align}
=&\frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1+\sigma_2^z}{2} + xy\frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2} + x^{-1}y^{-1}\frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_1^z}{2}\frac{1+\sigma_2^z}{2} + \frac{1+\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2} \tag{33}\\
&+ y\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1+\sigma_2^z}{2} - x^{-1}\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1+\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2} + x\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_1^z}{2}\frac{1+\sigma_2^z}{2} + y^{-1}\frac{1-\sigma_0^z}{2}\frac{1-\sigma_1^z}{2}\frac{1-\sigma_2^z}{2} \tag{34}\\
&:= u(\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2). \tag{35}
\end{align}
$$

Branching structure を図の[a]のように取った場合は，ユニタリ変換でσ_0^xの変換に寄与する部分は

$$
\begin{align}
\sum_{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6} \nu(0a_0a_1a_2)\nu(0a_0a_3a_2)^{-1}\nu(0a_4a_0a_3)\nu(0a_5a_4a_0)^{-1}\nu(0a_5a_6a_0)\nu(0a_6a_0a_1)^{-1}\left|a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6\right\rangle\left\langle a_0a_1a_2a_3a_4 \right. \tag{36}\\
= u(\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2)u(\sigma_0,\sigma_3,\sigma_2)^\dagger u(\sigma_4,\sigma_0,\sigma_3)u(\sigma_5,\sigma_4,\sigma_0)^\dagger u(\sigma_5,\sigma_6,\sigma_0)u(\sigma_6,\sigma_0,\sigma_1)^\dagger := \mathcal{U}. \tag{37}
\end{align}
$$

一方で，Levin-Gu模型は

$$
B_0 = -\sigma_0^x \prod_{j=1}^{6} i^{\frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2}} = i\sigma_0^x \prod_{j=1}^{6} \frac{1-i\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{\sqrt{2}}. \tag{38}
$$

さて，

$$\mathcal{U}\sigma_0^x\mathcal{U}^\dagger = B_0 \tag{39}$$

を解く．解は存在しなかった．

Branching structureを図の[b]のように取ると，

$$\mathcal{U}' = u(\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2)u(\sigma_0,\sigma_2,\sigma_3)u(\sigma_0,\sigma_3,\sigma_4)u(\sigma_0,\sigma_4,\sigma_5)u(\sigma_0,\sigma_5,\sigma_6)u(\sigma_0,\sigma_6,\sigma_1) \tag{40}$$

となり，

$$\mathcal{U}'\sigma_0^x\mathcal{U}'^\dagger = B_0 \tag{41}$$

を解くと，やはり解が存在しなかった．（[b]のとり方は並進対称性を破る．）

4 Appendix B in [2]

$$\tilde{Z} = \frac{1}{N_v}\sum_{g_0,g_1,g_2,g_3,\cdots}\prod_{\text{link}}\tilde{d}(g_0,g_1)\prod_{\text{tetrahedron}}\tilde{G}(g_0,g_1,g_2,g_3), \tag{42}$$

ここで，$\tilde{G}$は$\mathbb{Z}_2$対称性

$$G(gg_0,gg_1,gg_2,gg_3) = G(g_0,g_1,g_2,g_3) \tag{43}$$

を満たし，以下で定義される．

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(\uparrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow) = \tilde{G}(\downarrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow) = G_{000}^{000} = 1, && (44)\\
\tilde{G}(\uparrow,\uparrow,\uparrow,\downarrow) = \tilde{G}(\downarrow,\downarrow,\downarrow,\uparrow) = G_{111}^{000} = -i, && (45)\\
\tilde{G}(\uparrow,\downarrow,\uparrow,\uparrow) = \tilde{G}(\downarrow,\uparrow,\downarrow,\downarrow) = G_{001}^{110} = -i, && (46)\\
\tilde{G}(\uparrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow) = \tilde{G}(\downarrow,\downarrow,\uparrow,\downarrow) = G_{100}^{011} = -i, && (47)\\
\tilde{G}(\downarrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow) = \tilde{G}(\uparrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow) = G_{010}^{101} = -i, && (48)\\
\tilde{G}(\uparrow,\downarrow,\uparrow,\downarrow) = \tilde{G}(\downarrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow) = G_{110}^{110} = -1, && (49)\\
\tilde{G}(\uparrow,\downarrow,\downarrow,\uparrow) = \tilde{G}(\downarrow,\uparrow,\uparrow,\downarrow) = G_{101}^{101} = -1, && (50)\\
\tilde{G}(\uparrow,\uparrow,\downarrow,\downarrow) = \tilde{G}(\downarrow,\downarrow,\uparrow,\uparrow) = G_{011}^{011} = -1, && (51)
\end{aligned}$$

コサイクル条件を計算すると，$\tilde{G}$そのものはコサイクル条件を満たさないことがわかる． $\tilde{d}$は$\mathbb{Z}_2$対称性$\tilde{d}(gg_0,gg_1) = \tilde{d}(g_0,g_1)$を満たし，

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(\uparrow,\uparrow) = \tilde{d}(\downarrow,\downarrow) = d_0 = 1, && (52)\\
\tilde{d}(\uparrow,\downarrow) = \tilde{d}(\downarrow,\uparrow) = d_1 = -1. && (53)
\end{aligned}$$

で定義される． $\tilde{d}$はコサイクル$\nu \in Z^3(\mathbb{Z}_2,U(1))$で構成される模型 [1]には出現しない． $\tilde{G},\tilde{d}$で得られる模型がLevin-Gu模型に一致するかどうかは，[2]には，“*We expect that these two phases correspond to the two types of paramagnets H_0, H_1.*” とだけ書かれており，不明．

References

[1] Xie Chen, Zheng-Cheng Gu, Zheng-Xin Liu, Xiao-Gang Wen, *Symmetry protected topological orders and the group cohomology of their symmetry group*, arXiv:1106.4772.

[2] Michael Levin, Zheng-Cheng Gu, *Braiding statistics approach to symmetry-protected topological phases*, arXiv:1202.3120.

[3] Luiz H. Santos, Eduardo Fradkin, *Instanton effects in lattice models of bosonic symmetry-protected topological states*, arXiv:1512.06864.