局所項による拘束を用いたハミルトニアンの基底状態の表現について

塩崎　謙

July 21, 2024

Abstract

[?]の命題D.1のメモ．

ハミルトニアン

$$H = \sum_j H_j \tag{1}$$

が局所的とは，

$$||[H_j, \mathcal{O}_i]|| \leq u(|j-i|) \tag{2}$$

が成立すること．ここで，uは任意のべきより早く減衰する関数．（指数関数的減衰は要請せず，べきよりも早く減衰すると仮定．）

$H = \sum_j H_j$をギャップのある局所ハミルトニアンとする．基底状態$|\Psi\rangle$のエネルギー固有値はゼロとする．$\Delta > 0$をギャップとする．このとき，$|\Psi\rangle$をある局所項H_jのゼロエネルギー固有状態$\tilde{H}_j |\Psi\rangle = 0$として表現できる．

これを示す．

$$\tilde{H}_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iHt} H_j e^{-iHt} w(t) dt \tag{3}$$

とする．すると，

$$\sum_j \tilde{H}_j = H \times \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt. \tag{4}$$

よって，

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = 1 \tag{5}$$

なるように$w(t)$を取る．つまり，フーリエ変換

$$\hat{w}(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} dt w(t) e^{i\epsilon t} \tag{6}$$

に対して，

$$\hat{w}(0) = 1 \tag{7}$$

とする．また，$\tilde{H}_j$にエルミート性を要求すると，

$$w(t)^* = w(-t) \Leftrightarrow \hat{w}(\epsilon)^* = \hat{w}(-\epsilon). \tag{8}$$

任意の励起状態$|n\rangle$に対して，

$$\left\langle n \middle| \tilde{H}_j \middle| \Psi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iE_n t} \langle n|H_j|\Psi\rangle \, w(t)dt = \hat{w}(E_n) \langle n|H_j|\Psi\rangle \tag{9}$$

であるので，$\hat{w}(\epsilon)$を

$$\hat{w}(|\epsilon| > \Delta) = 0 \tag{10}$$

が成立するように取ると，基底状態への射影をPとして，

$$(1-P)\tilde{H}_j P = 0 \tag{11}$$

という望みの性質が得られる． $\hat{w}(\epsilon)$を

$$\hat{w}(\epsilon = 0) = 0, \quad \hat{w}(|\epsilon| > \Delta) = 0 \tag{12}$$

を満たす滑らかな（C^∞級）関数とする．よって，$w(t)$は任意のべきより早く減衰する．

残りは$\tilde{H}_j$が局所的であるように構成できるかどうか．サイトi近傍に台を持つ任意の局所演算子O_iに対して，

$$||[\tilde{H}_j, O_i]|| \le \int_{-\infty}^{\infty} ||[H_j(t), O_i]|||w(t)|dt. \tag{13}$$

Lieb=Robinson境界より，大雑把に，

$$||[H_j(t), O_i]|| \le c||H_j||||O_i|| \times \max\{e^{-a(l-v|t|)}, 1\}, \quad l \sim |i-j|. \tag{14}$$

として良いだろう．

$$||[\tilde{H}_j, O_i]|| \le c||H_j||||O_i|| \times 2 \times \left[\int_0^{l/v} e^{-a(l-vt)}|w(t)|dt + \int_{l/v}^{\infty} |w(t)|dt\right] \tag{15}$$

と見積もることができる．これが，lに関して任意のべきより早く減衰することを示したい．

以下の証明は下村氏によるもの [1]．

$w(t)$は任意のべきより早く減衰するため，任意の$n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$に対して

$$|w(t)|t^n \xrightarrow{t\to\infty} 0 \tag{16}$$

が成立する． $w(t)$は有界なので，任意の$n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$に対してある定数M_nが存在して，

$$|w(t)| \le M_n t^{-n} \quad \text{for } t > 0, \tag{17}$$

として良い．すると，

$$\int_{l/v}^{\infty} |w(t)|dt \le \int_{l/v}^{\infty} M_{n+1} t^{-n-1} dt = M_{n+1}(-n)^{-1}(-(l/v)^{-n}) = O(l^{-n}), \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{l/v} e^{-a(l-vt)}|w(t)|dt &\le \int_0^{l/(2v)} e^{-a(l-vt)} M_0 dt + \int_{l/(2v)}^{l/v} e^{-a(l-vt)} M_{n+1} t^{-n-1} dt && (19)\\
&= M_0 \frac{e^{-al/2} - e^{-al}}{av} + M_{n+1}(l/v)^{-n} \int_{1/2}^{1} e^{-a(l-ls)} s^{-n-1} ds && (20)\\
&\le M_0 \frac{e^{-al/2} - e^{-al}}{av} + M_{n+1}(l/v)^{-n} \int_{1/2}^{1} s^{-n-1} ds && (21)\\
&= M_0 \frac{e^{-al/2} - e^{-al}}{av} + M_{n+1}(l/v)^{-n} \frac{2^n - 1}{n} && (22)\\
&= O(l^{-n}). && (23)
\end{aligned}$$

よって示された．

メモ：

- [?]のLemma 2でも，Hが時間依存するより一般的な状況で$\tilde{H}_j$が局所的だとの主張があるが，証明が書かれていない．

[1] Kenji Shimomura, private communication.

References

[1] Alexei Kitaev *Anyons in an exactly solved model and beyond*, math-ph/0507008.

[2] S. Bravyi, M. B. Hastings, *A short proof of stability of topological order under local perturbations*, arXiv:1001.4363.