# 非エルミートハミルトニアンにおける38通りの対称性クラスの導出

塩崎　謙

August 22, 2023

$G$を有限群とする．$\phi, \eta, c : G \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$を準同型とする．正方行列$H$に対する対称性として，以下の形式のものを考える．

$$u_g \left\{ \begin{array}{ll} H & (\phi_g, \eta_g) = (1,1) \\ H^* & (\phi_g, \eta_g) = (-1,1) \\ H^\dagger & (\phi_g, \eta_g) = (1,-1) \\ H^T & (\phi_g, \eta_g) = (-1,-1) \end{array} \right\} u_g^\dagger = c_g H, \quad u_g \left\{ \begin{array}{ll} u_h & (\phi_g = 1) \\ u_h^* & (\phi_g = -1) \end{array} \right\} = z_{g,h} u_{gh}. \tag{1}$$

ここで$u_g$はユニタリ行列，$z_{g,h}$は2コサイクル$z \in Z^2(G, U(1)_\phi)$である．行列$H$は部分群$G_0 = \{g \in G | \phi_g = \eta_g = c_g = 1\}$の既約表現のセクターにブロック対角化される．群元$g \in G \backslash G_0$については，一般論より，既約表現を変化させるか，あるいは，既約表現内で$\mathbb{Z}_2$対称性として作用し，かつ$\phi_g = -1$のときは$u_g u_g^* = \pm 1$の2通りの分類が存在する．

既約表現を変化させない対称性として非等価な対称性がどれだけ存在するかに興味がある．$G = \mathbb{Z}_2^{\times N}$と仮定してよい．$(\phi_g, \eta_g, c_g) = (1,1,1)$なる群元の不在を仮定して良いから，$N = 0,1,2,3$のみ考えれば十分．

— $N = 0$の場合．
1通り．

— $N = 1$の場合．
以下の6通りで尽くされる．

$$(\phi_1, \eta_1, c_1) = (-1,1,1), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (-1,-1,-1), (1,-1,1), (1,1,-1), (1,-1,-1).$$

$\phi_1 = -1$は$u_1 u_1^* = \pm 1$の2通り存在するから，$2 \times 4 + 3 = 11$通り．

— $N = 2$の場合．
$\phi_g = -1$を含む場合は以下の4通りで尽くされる．

$$\begin{aligned} \{(\phi_1, \eta_1, c_1), (\phi_2, \eta_2, c_2)\} = & \{(-1,1,1), (-1,-1,1)\}, \\ & \{(-1,1,1), (-1,1,-1)\}, \\ & \{(-1,1,1), (-1,-1,-1)\}, \\ & \{(-1,-1,1), (-1,1,-1)\}. \end{aligned}$$

相対位相は$u_1 u_2^* = u_2 u_1^*$と固定できる．よって，各4通りに対して，$u_1 u_1^* = \pm 1, u_2 u_2^* = \pm 1$の符号の選び方の4通り存在する．$\phi_g = -1$を含まない場合は以下の1通りのみ：

$$\{(\phi_1, \eta_1, c_1), (\phi_2, \eta_2, c_2)\} = \{(1,-1,1), (1,1,-1)\}.$$

このとき，$u_1 u_2 = \pm u_2 u_1$の符号の選び方の2通り存在する．よって，$4 \times 4 + 2 = 18$通り．

— $N = 3$の場合．
必ず$\phi_g = -1$を含み，生成子として以下を選ぶことができる．

$$\{(\phi_1, \eta_1, c_1), (\phi_2, \eta_2, c_2), (\phi_3, \eta_3, c_3)\} = \{(-1,1,1), (-1,-1,1), (-1,1,-1)\}.$$

相対位相は$u_i u_j^* = u_j u_i^*, i \neq j$と固定できる． $u_i u_i^* = \pm 1, i = 1,2,3$の符号の選び方の$2^3 = 8$通り存在する．

以上より，$1 + 11 + 18 + 8 = 38$通りの対称性クラス [1]が得られた．

$(\phi_g, \eta_g, c_g)$と[1]における対称性の名称についてメモしておく．

| $(\phi_g, \eta_g, c_g)$ | | |
|---|---|---|
| $(-1, 1, 1)$ | $uH^* u^\dagger = H$ | TRS |
| $(-1, -1, 1)$ | $uH^T u^\dagger = H$ | TRS$^\dagger$ |
| $(-1, 1, -1)$ | $uH^* u^\dagger = -H$ | PHS$^\dagger$ |
| $(-1, -1, -1)$ | $uH^T u^\dagger = -H$ | PHS |
| $(1, -1, 1)$ | $uH^\dagger u^\dagger = H$ | Pseudo Hermiticity |
| $(1, 1, -1)$ | $uHu^\dagger = -H$ | SLS (sublattice symmetry) |
| $(1, -1, -1)$ | $uH^\dagger u^\dagger = -H$ | CS (chiral symmetry) |

38通りの独立な対称性クラスでなく，AZクラス，AZ$^\dagger$クラス，AZ+SLSの枠組みが便利．

# References


[1] Kohei Kawabata, Ken Shiozaki, Masahito Ueda, Masatoshi Sato, “Symmetry and Topology in Non-Hermitian Physics”, arXiv:1812.09133.