メモ：非エルミート系の対称性

塩崎　謙

August 14, 2024

Abstract

非エルミート系の対称性の定義として，エルミート化したハミルトニアンに対して通常のエルミート系の対称性の定義となるように非エルミート系の対称性を定義する方法がある [1]．この流儀についてのメモ．

1　非エルミート系

Gを有限群，Gのパラメータ空間Xへの群作用をgkと書く． $\phi, \eta, c : G \to \mathbb{Z}/2 = \{\pm 1\}$を準同型とする．行列$M$に対して記号

$$M^{\phi_g} = \begin{cases} M & (\phi_g = 1) \\ M^* & (\phi_g = -1) \end{cases}, \tag{1.1}$$

$$M^{(\phi_g,\eta_g)} = \begin{cases} M & (\phi_g = 1, \eta_g = 1) \\ M^* & (\phi_g = -1, \eta_g = 1) \\ M^\top & (\phi_g = -1, \eta_g = -1) \\ M^\dagger & (\phi_g = 1, \eta_g = -1) \end{cases}, \tag{1.2}$$

を導入する．対称性として，

$$u_g H_k^{(\phi_g,\eta_g)} v_k^\dagger = c_g H_{gk}, \quad g \in G, \tag{1.3}$$

なるものを考える [1]． u_g, v_gはユニタリー行列．すると，

$$c_{gh} H_{ghk} = \begin{cases} u_g (u_h H_k^{(\phi_h,\eta_h)} v_h^\dagger)^{\phi_g} v_g^\dagger & (\eta_g = 1) \\ u_g (v_h [H_k^{(\phi_h,\eta_h)}]^\dagger u_h^\dagger)^{\phi_g} v_g^\dagger & (\eta_g = -1) \end{cases} \tag{1.4}$$

が成立する． $z \in Z^2(G, U(1)_\phi)$を群コサイクルとして，

$$z_{g,h} u_{gh} = \begin{cases} u_g u_h^{\phi_g} & (\eta_g = 1) \\ u_g v_h^{\phi_g} & (\eta_g = -1) \end{cases}, \quad z_{g,h} v_{gh} = \begin{cases} v_g v_h^{\phi_g} & (\eta_g = 1) \\ v_g u_h^{\phi_g} & (\eta_g = -1) \end{cases}, \tag{1.5}$$

とすると，

$$c_{gh} H_{ghk} = u_{gh} H_{ghk}^{(\phi_{gh},\eta_{gh})} v_{gh}^\dagger \tag{1.6}$$

が成立する [2]． u, vの乗数系$z_{g,h}$が一致しているのは，(1.4)の右辺において位相因子をキャンセルさせるため．

[1] [1]は複素共役を考えていないが，複素共役を含む場合への拡張は容易．

[2] 注意として，例えば転置の対称性を$u_g H_k u_g^\dagger = H_{gk}^\top$のように右側に転置をつけて定義すると，$g, h$が転置型の対称性のとき，$u_{gh} \sim u_g^* u_h$となる．対称性の定義は(1.3)のように左側に複素共役，転置，エルミート共役をつけるのが良いだろう．

- $z_{g,h}$は一般にはパラメータ空間Xの点に依存しても良い．
- 固定点$gk = k$においてH_k自身が群の“表現”u_g, v_gをつなぐintertwinerであるので，固定点$gk = k$において点ギャップを有するハミルトニアンH_kが存在すれば，u_g, v_gは“等価な表現”である．つまり，点ギャップを有するハミルトニアンを議論したい場合は，(1.5)に加えて，u_g, v_gは“等価な表現”に取る必要がある．詳しくは[1]を見よ．

2 エルミート化

２重化したエルミートハミルトニアン

$$\tilde{H}_k = \begin{pmatrix} & H_k \\ H_k^\dagger & \end{pmatrix}_\sigma \tag{2.1}$$

を導入する．２重化した対称性行列も

$$\tilde{u}_g = \begin{cases} \begin{pmatrix} u_g & \\ & v_g \end{pmatrix} & (\eta_g = 1) \\ \begin{pmatrix} & u_g \\ v_g & \end{pmatrix} & (\eta_g = -1) \end{cases}, \quad g \in G, \tag{2.2}$$

も導入する． $\tilde{H}_k$に対する対称性をまとめると以下：

$$\sigma_z \tilde{H}_k \sigma_z = -\tilde{H}_k, \tag{2.3}$$

$$\tilde{u}_g \tilde{H}_k \tilde{u}_g^\dagger = c_g \tilde{H}_{gk}, \quad \tilde{u}_g \tilde{u}_h^{\phi_g} = z_{g,h} \tilde{u}_{gh}, \tag{2.4}$$

$$\sigma_z \tilde{u}_g = \eta_g \tilde{u}_g \sigma_z. \tag{2.5}$$

3 実線ギャップ条件

H_kが実線ギャップ条件を満たす，つまり

$$\Re(E_k) \neq 0, \quad E_k \in \mathrm{Spec}(H_k), \quad k \in X, \tag{3.1}$$

が満たされ，かつ

$$u_g = v_g, \quad g \in G, \tag{3.2}$$

が満たされるときは，H_kを実線ギャップとG対称性を保ったままエルミートに変形できる [3]．条件$H_k^\dagger = H_k$は２重化したエルミートハミルトニアン$\tilde{H}_k$に対する追加のカイラル対称性

$$\sigma_y \tilde{H}_k \sigma_y = -\tilde{H}_k \tag{3.3}$$

を要請することと等価 [2]． σ_yと他の対称性の関係は，

$$\sigma_z \sigma_y = -\sigma_y \sigma_z, \tag{3.4}$$

$$\tilde{u}_g \sigma_y^{\phi_g} = \phi_g \eta_g \sigma_y \tilde{u}_g, \quad g \in G. \tag{3.5}$$

H_kに対する対称性を確認すると，

$$\tilde{H}_k = H_k \sigma_x, \tag{3.6}$$

$$\tilde{u}_g = u_g \sigma_x^{\frac{1-\eta_g}{2}}, \quad g \in G, \tag{3.7}$$

[3] $u_g \neq v_g$の場合は，射影$P_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z - H_k}$が$G$対称性を満たさないため，$G$対称性を保ったままエルミートなハミルトニアンに変形できない．

より，

$$u_g H_k^{\phi_g} u_g^\dagger = c_g H_{gk}, \quad g \in G, \tag{3.8}$$

となり，もとの対称性に戻る．

4 純虚線ギャップ条件

H_kが純虚線ギャップ条件を満たす，つまり

$$\Im(E_k) \neq 0, \quad E_k \in \mathrm{Spec}(H_k), \quad k \in X, \tag{4.1}$$

が満たされ，かつ

$$u_g = v_g, \quad g \in G, \tag{4.2}$$

が満たされるときは，H_kをG対称性と反エルミートに純虚線ギャップを保ったまま変形できる．条件$H_k^\dagger = -H_k$は2重化したエルミートハミルトニアン$\tilde{H}_k$に対する追加のカイラル対称性

$$\sigma_x \tilde{H}_k \sigma_x = -\tilde{H}_k \tag{4.3}$$

を要請することと等価 [2]． σ_xと他の対称性の関係は，

$$\sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z, \tag{4.4}$$
$$\tilde{u}_g \sigma_x^{\phi_g} = \sigma_x \tilde{u}_g, \quad g \in G. \tag{4.5}$$

H_kに対する対称性を確認すると，

$$\tilde{H}_k = H_k i\sigma_y, \tag{4.6}$$
$$\tilde{u}_g = u_g \sigma_x^{\frac{1-\eta_g}{2}}, \quad g \in G, \tag{4.7}$$

より，

$$u_g H_k^{\phi_g} u_g^\dagger = \eta_g c_g H_{gk}, \quad g \in G, \tag{4.8}$$

となる．エルミートなハミルトニアン

$$H'_k = iH_k \tag{4.9}$$

を導入すると，

$$u_g (H'_k)^{\phi_g} u_g^\dagger = c_g \eta_g \phi_g H'_{gk}, \quad g \in G, \tag{4.10}$$

となる．

References

[1] Ken Shiozaki, Seishiro Ono, Symmetry indicator in non-Hermitian systems, arXiv:2105.00677.

[2] Nobuyuki Okuma, Kohei Kawabata, Ken Shiozaki, Masatoshi Sato, Topological Origin of Non-Hermitian Skin Effects, arXiv:1910.02878.