点ギャップのあるハミルトニアンの平坦化が対称性と両立すること

塩崎　謙

February 20, 2025

1　エルミート系

H_kは有限サイズのエルミート行列である．ギャップのある（任意のkにおいてゼロ固有値を持たない）ハミルトニアンH_kに対して，スペクトル分解

$$H_k = \sum_a \lambda_k^a P_k^a, \quad \lambda_k^a \neq 0, \tag{1.1}$$

としたとき，平坦化を

$$Q_k := P_k^+ - P_k^-, \quad P_k^+ = \sum_{a,\lambda_a>0} P_k^a, \quad P_k^- = \sum_{a,\lambda_k^a<0} P_k^a, \tag{1.2}$$

と定義する． $u_k(g)$を対称性変換のユニタリ行列とする．ハミルトニアンH_kが対称性

$$u_k(g) H_k u_k(g)^\dagger = H_{gk}, \quad g \in G, \tag{1.3}$$

を満たすとき，平坦化ハミルトニアンQ_kも対称性を満たすことを示す．

エネルギー複素平面において正，負の固有値を囲む閉経路をそれぞれC_+, C_-とする．（H_kは有限次元行列であり，ギャップを仮定しているため，$C_\pm$はkに依存せず取ることができる．）すると，

$$P_k^\pm = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\pm} \frac{dz}{z - H_k}. \tag{1.4}$$

これから，

$$u_k(g) P_k^\pm u_k(g)^\dagger = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\pm} \frac{dz}{z - u_k(g) H_k u_k(g)^\dagger} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\pm} \frac{dz}{z - H_{gk}} = P_{gk}^\pm. \tag{1.5}$$

よって示された．

対称性としては，より一般に，

$$u_k(g) H_k^* u_k(g)^\dagger = H_{gk}, \tag{1.6}$$

$$u_k(g) H_k u_k(g)^\dagger = -H_{gk}, \tag{1.7}$$

$$u_k(g) H_k^* u_k(g)^\dagger = -H_{gk}, \tag{1.8}$$

なる対称性を課してもQ_kが同一の対称性を満たすことが示される．

2　非エルミート系，点ギャップ

H_kは有限サイズの正方行列である． H_kの点ギャップ，つまり，任意のkにおいて$\det H_k \neq 0$を仮定する．特異値分解

$$H_k = U_k \Sigma_k V_k^\dagger \tag{2.1}$$

に対して平坦化（=ユニタリ化）を

$$Q_k = U_k V_k^\dagger \tag{2.2}$$

と定義する．特異値分解の一意性より，Q_kは大域的に定義される．

$u_k(g), v_k(g)$を対称性変換のユニタリ行列とする．対称性

$$u_k(g) H_k v_g(k)^\dagger = H_{gk}, \quad g \in G, \tag{2.3}$$

を考える．このとき，平坦化ハミルトニアンQ_kも同様の対称性を満たすことを示す．

エルミートハミルトニアンを

$$\tilde{H}_k = \begin{pmatrix} & H_k \\ H_k^\dagger & \end{pmatrix}_\sigma \tag{2.4}$$

として導入すると，このエルミートハミルトニアンはカイラル対称性

$$\sigma_z H_k \sigma_z = -H_k, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

とG対称性

$$\tilde{U}_k(g) \tilde{H}_k \tilde{U}_k(g)^\dagger = \tilde{H}_{gk}, \quad g \in G, \tag{2.6}$$

を有する．よって平坦化したエルミートハミルトニアン$\tilde{Q}_k$も$\sigma_z, \tilde{U}_k(g)$対称性を満たす．単純計算より，

$$\tilde{Q}_k = \begin{pmatrix} & U_k V_k^\dagger \\ V_k U_k^\dagger & \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

が示される．よって示された．

非エルミート系におけるより一般の対称性

$$u_k(g) H_k v_g(k)^\dagger = H_{gk}, \tag{2.8}$$
$$u_k(g) H_k^\dagger v_g(k)^\dagger = H_{gk}, \tag{2.9}$$
$$u_k(g) H_k^* v_g(k)^\dagger = H_{gk}, \tag{2.10}$$
$$u_k(g) H_k^\top v_g(k)^\dagger = H_{gk}, \tag{2.11}$$
$$u_k(g) H_k v_g(k)^\dagger = -H_{gk}, \tag{2.12}$$
$$u_k(g) H_k^\dagger v_g(k)^\dagger = -H_{gk}, \tag{2.13}$$
$$u_k(g) H_k^* v_g(k)^\dagger = -H_{gk}, \tag{2.14}$$
$$u_k(g) H_k^\top v_g(k)^\dagger = -H_{gk}, \tag{2.15}$$

においても同様の結論が得られる．（エルミート化したハミルトニアン$\tilde{H}_k$がエルミート系の対称性を満たすため．）