$\lim_{N\to\infty} \mathrm{sp}(V_{\mathrm{OBC}}) \subset \mathrm{sp}(V_{\mathrm{SIBC}})$ について

塩崎　謙

YITP

平成 31 年 12 月 3 日

概 要

このノートでは，$\lim_{N\to\infty} \mathrm{sp}(V_{\mathrm{OBC}}) \subset \mathrm{sp}(V_{\mathrm{SIBC}})$ に対する，エルミート系の性質を用いたひとつの説明を与える．

1　説明の流れ

V を次の形のブロック Toeplitz 作用素とする．

$$V = \begin{pmatrix} A_0 & A_{-1} & A_{-2} & \cdots \\ A_1 & A_0 & A_{-1} & \\ A_2 & A_1 & A_0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{1}$$

A_j は正方行列であり，適当に短距離とする．対応して，ブロック Toeplitz 行列を

$$V_N = \begin{pmatrix} A_0 & A_{-1} & A_{-2} & \cdots & A_{-N+1} & A_{-N} \\ A_1 & A_0 & A_{-1} & & & A_{-N+1} \\ A_2 & A_1 & A_0 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ A_{N-1} & & & & A_0 & A_{-1} \\ A_N & A_{N-1} & \cdots & & A_1 & A_0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

とする．示したいことは，Ref. [1] の Lemma 11.1 に相当する次の補題である．

$$\Lambda_w(V) \subset \mathrm{sp}(V). \tag{3}$$

ここで，$\Lambda_w(V) :=$ “$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{sp}(V_n)$” は，$V_n$ の固有値 λ_n の点列 $\lambda_{n_j}, n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ があり，$\lambda_{n_j} \to \lambda$ なる $\lambda \in \mathbb{C}$ の集合として定義される．一方で，V のスペクトルは

$$\mathrm{sp}(V) := \{\lambda \in C | \lambda - V \text{ が可逆でない } \} \tag{4}$$

によって定義される．Ref. [1] の Lemma 11.1 の証明をみると，上の補題 (3) は [1] の Theorem 3.7（の一部）に相当する次の定理

$$V \text{ が可逆} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} ||V_n^{-1}||_p < \infty \tag{5}$$

から直ちに従う．ここで，$\limsup_{n\to\infty}$ は上極限

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \lim_{k\geq n} a_k \tag{6}$$

であり，ノルムは $1 \leq p \leq \infty$ で成立する．[1] 特に $p = 2$ ノルムの場合は $\limsup_{n\to\infty} ||V_n^{-1}||_2 < \infty$ は $||V_n^{-1}||_2 = \sigma_{\max}(V_n^{-1}) = \sigma_{\min}(V_n)^{-1}$ より，n が十分大きいとき V_n の最小特異値が下から押さえられる $\sigma_{\min}(V_n) > \delta > 0$ と言い換えても良い．

実際，(5) を認めると，(3) は以下のようにして証明される．$\lambda_0 \notin \mathrm{sp}(V)$ とする．(5) より，十分大きな n_0 が存在し $n \geq n_0$ に対して $||(V_n - \lambda_0)^{-1}|| < M < \infty$ とできる．すると，$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{2M}$ なる $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$n \geq n_0$ のとき λ に近づく V_n の固有値は存在しない．実際，

$$\begin{aligned}
||(V_n - \lambda)^{-1}|| &= ||(V_n - \lambda_0 + \lambda_0 - \lambda)^{-1}|| && (8)\\
&= ||(V_n - \lambda_0)^{-1}(1 - (\lambda - \lambda_0)(V_n - \lambda_0)^{-1})^{-1}|| && (9)\\
&\leq ||(V_n - \lambda_0)^{-1}|| \times ||(1 - (\lambda - \lambda_0)(V_n - \lambda_0)^{-1})^{-1}|| && (10)\\
&\leq ||(V_n - \lambda_0)^{-1}|| \times ||\sum_{k=0}^{\infty}\{(\lambda - \lambda_0)(V_n - \lambda_0)^{-1}\}^k|| && (11)\\
&\leq ||(V_n - \lambda_0)^{-1}|| \times \sum_{k=0}^{\infty}\{|\lambda - \lambda_0| \times ||(V_n - \lambda_0)^{-1}||\}^k && (12)\\
&= ||(V_n - \lambda_0)^{-1}|| \times \frac{1}{1 - |\lambda - \lambda_0| \times ||(V_n - \lambda_0)^{-1}||} && (13)\\
&\leq M \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2M && (14)
\end{aligned}$$

となり，V_n の固有値は λ_0 の半径 $1/M$ 以内には存在しない．よって，$\lambda_0 \notin \Lambda_w(V)$ が成立する．ここでの議論はノルムの選び方に依存していないことに注意しよう．

定理 (5) を $p = 2$ の場合に “証明” しよう．V が可逆のときに十分大きな n に対して V_n の最小特異値に “ギャップ” が存在することを示せば良い．自由度を 2 倍にして，エルミートなハミルトニアン

$$H = \begin{pmatrix} & V \\ V^\dagger & \end{pmatrix}, \qquad H_n = \begin{pmatrix} & V_n \\ V_n^\dagger & \end{pmatrix} \tag{15}$$

を導入する．OBC のハミルトニアン H_n の固有値は V_n の特異値 $\pm\sigma_j$ に他ならないことに注意．いま，

$$V \text{ が可逆} \quad \Rightarrow \quad H \text{ は有限のエネルギーギャップ } E_g \text{ を持つ} \tag{16}$$

を仮定しよう．Toeplitz 作用素 $V = T(a)$ の場合は，$T(a)$ が可逆であることと，$a(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}$（ギャップレスでないこと）かつ wind $a = 0$（H がゼロ状態を持たないこと）が等価であることを示すことができるので，(16) が成立し，逆も成立する．一般の Block Toeplitz 作用素についてこれが成立するかはきちんと

---

[1] メモ：

$$||A||_p := \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||_p}{||x||_p}, \quad ||x||_p = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}, \quad ||x||_\infty = \sup_n |x_n|.$$

特に，$p = 2$ のときは，

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\dagger A)} = \sigma_{\max}(A), \tag{7}$$

つまり，A の最大特異値に等しい．

確かめる必要がある.（次節を見よ.）さらに，エルミート系における以下の “物理的” な仮定をする.

$$\begin{aligned}&H \text{ が有限のエネルギーギャップ } E_g \text{ を有するならば,}\\ &E_g^{-1} \text{ に比べて十分 } n \text{ が大きければ，} H_n \text{ も有限のエネルギーギャップ } E_g \text{ を有する.}\end{aligned} \tag{17}$$

すると，十分大きな n に対しては，V_n の特異値が下から押さえられる.

$$\sigma_j(V_n) \geq E_g. \tag{18}$$

よって，$p = 2$ の場合の (5) を得る.

1.1 V の可逆性と H のスペクトルについて

V が可逆であるとき，H が有限のエネルギーギャップ $E_g > 0$ を有することを示したい．V のスペクトルについては，

$$V(\mathbb{T}) \subset \mathrm{sp}(V) \tag{19}$$

が成立する．よって V が可逆であれば $0 \notin V(\mathbb{T})$ であるが，

$$\det H(k) = |\det V(k)|^2 \tag{20}$$

より，H のバルクにギャップがあることを意味する．H のスペクトルについては，“エルミート系の常識” を使うと，H のバルクにエネルギーギャップがある場合は

$$\mathrm{sp}(H) = H(\mathbb{T}) \cup \{\text{ edge states }\} \tag{21}$$

と分離する．よって，ゼロ・エネルギー端状態が存在しないことを示せれば良い．対偶

$$H \text{ にゼロ・エネルギー端状態が存在する} \quad \Rightarrow \quad V \text{ が可逆でない} \tag{22}$$

は以下のようにして示すことができる．H のゼロ・エネルギー状態は，端に局在していてカイラリティでラベルできる.

$$\begin{pmatrix} & V \\ V^\dagger & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ |0\rangle \end{pmatrix} = 0 \tag{23}$$

の場合は，$V\,|0\rangle = 0$ となり，V が局在するゼロ・エネルギー状態をもち，可逆でない.

$$\begin{pmatrix} & V \\ V^\dagger & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{24}$$

の場合は $V^\dagger\,|0\rangle = 0$ となり，可逆でない.

以上より，V が可逆である場合は，H のバルク $H(\mathbb{T})$ に有限のエネルギーギャップが存在し，H はゼロ・エネルギー端状態を持たないことが示された.

1.2 まとめ

以上の議論を短くまとめると，以下になる．

$$\Lambda_w(V) \subset \mathrm{sp}(V) \tag{25}$$

を示したい．$\lambda_0 \notin \mathrm{sp}(V)$ を仮定する．すると，対応するエルミートハミルトニアン

$$H(\lambda_0) = \begin{pmatrix} & V - \lambda_0 \\ V^\dagger - \lambda_0^* & \end{pmatrix} \tag{26}$$

には有限のエネルギーギャップ $E_g(\lambda_0)$ が存在する．すると，OBC のハミルトニアン

$$H_n(\lambda_0) = \begin{pmatrix} & V_n - \lambda_0 \\ V_n^\dagger - \lambda_0^* & \end{pmatrix} \tag{27}$$

についても，“エルミート系の常識” より n がバルクギャップに比べて十分大きければ $H_n(\lambda_0)$ も有限のエネルギーギャップ $E_g(\lambda_0)$ を持つだろう．有限行列 $H_n(\lambda_0)$ については，$H_n(\lambda_0)$ の正の固有値と $V_n - \lambda_0$ の特異値は等しいことに注意する．Weyl 不等式より，$V_n - \lambda_0$ の任意の固有値 $\lambda_j - \lambda_0$ は

$$|\lambda_j - \lambda_0| \geq \sigma_{\min}(H_n(\lambda_0)) \tag{28}$$

を満たすので，n が十分大きければ，

$$|\lambda_j - \lambda_0| \geq \sigma_{\min}(H_n(\lambda_0)) \geq E_g(\lambda_0) > 0 \tag{29}$$

が成立し，$n \to \infty$ で λ_0 に近づく V_n の固有値は存在しないことがわかる．よって $\lambda_0 \notin \Lambda_w(V)$.

A 固有値と特異値の関係

一般に，行列の固有値の絶対値は最小特異値によって下から押さえることができる．行列 A の固有値 λ_j を絶対値の大きい順に $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_L|$ と並べ，同様に V の特異値を $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_L$ と並べる．Weyl 不等式

$$\prod_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leq \prod_{j=1}^{k} \sigma_j, \quad (k = 1, \ldots, L-1), \tag{30}$$

$$\prod_{j=1}^{L} |\lambda_j| = \prod_{j=1}^{L} \sigma_j \tag{31}$$

に注意すると，

$$|\lambda_L| = \frac{\prod_{j=1}^{L} \sigma_j}{\prod_{j=1}^{L-1} |\lambda_j|} \geq \frac{\prod_{j=1}^{L} \sigma_j}{\prod_{j=1}^{L-1} \sigma_j} = \sigma_L \tag{32}$$

となる．$k = 1$ の Weyl 不等式に注意すると，結局，

$$\sigma_1 \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_L| \geq \sigma_L \tag{33}$$

の関係がある．

参考文献

[1] Böttcher, Albrecht, and Sergei M. Grudsky. *Spectral properties of banded Toeplitz matrices*, **96**, Siam, 2005.