非単連結な群におけるPolyakov=Wiegmann公式

塩崎　謙

March 2, 2025

Abstract

群Gが単連結でない場合は，Polyakov=Wiegmann（PW）公式は修正を受ける[?]．この証明を追う．

1　PW公式

Gとしては，$G=U(n), SO(n)$を考える． Mを２次元向き付けのある閉じた多様体とする．滑らかなマップ

$$g: M \to G \tag{1.1}$$

に対して，３次元多様体Xへの拡張

$$\tilde{g}: X \to G, \quad \partial X = M, \quad \tilde{g}|_M = g, \tag{1.2}$$

をひとつ取る [1]． WZ項を

$$H(g) = \frac{1}{12\pi} \mathrm{tr}\,[(g^{-1}dg)^3], \tag{1.3}$$

$$\mathrm{WZ}[g] := \int_X H(\tilde{g}) \in \begin{cases} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & (G=U(n)) \\ \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z} & (G=SO(n)) \end{cases} \tag{1.4}$$

と定義する．マップのホモトピー$g_t: M \to G, t \in [0,1]$に対して，

$$\mathrm{WZ}[g_1] = \mathrm{WZ}[g_0] + \int_{M\times[0,1]} H(g_t) \tag{1.5}$$

が成立する．さらに，$\mathrm{tr}\,[(g^\dagger dg)^3]$は$X$の計量に依存しないから，$M$の計量の取り替えに対して$\mathrm{WZ}[g]$は不変．以下を計算したい．

- $\mathrm{WZ}[g_0 g_1] = ?$
- $\mathrm{WZ}[g_0 \oplus g_1] = ?$

g_0, g_1の拡張をそれぞれ$\tilde{g}_0, \tilde{g}_1$としても，その積$\tilde{g}_0\tilde{g}_1$は，Mの種数が非ゼロの場合には一般にはg_0g_1の拡張とは限らない．直和についても同様．これは，マップg_0, g_1のサイクル$H_1(M)$に沿ったホモトピー群$\pi_1(G)$が非自明な場合に起こる．例えば，トーラスの場合に，g_0はx方向に巻きついているがy方向は潰すことができ，かつg_1はy方向に巻き付きているがx方向に潰すことができる場合に，g_0g_1はx,yの両方向に潰すことはできない．（実際には，半端な方向に潰すことができる．）

[1]拡張の存在については，$\Omega_2^{\mathrm{SO}}(G)$を調べれば良い． $\Omega_0^{\mathrm{SO}} = \mathbb{Z}, \Omega_{i=1,2}^{\mathrm{SO}} = 0$なので，$\Omega_2^{\mathrm{SO}}(G) \cong H_2(G,\mathbb{Z})$.

さて単純計算より，

$$H(g_0g_1)=H(g_0)+H(g_1)+d\ \mathrm{tr}\ \left[\frac{1}{4\pi}g_0^{-1}dg_0g_1dg_1^{-1}\right] \tag{1.6}$$

であるので，ほぼ，

$$\mathrm{WZ}[g_0g_1]\sim \mathrm{WZ}[g_0]+\mathrm{WZ}[g_1]+\frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\,[g_0^{-1}dg_0g_1dg_1^{-1}] \tag{1.7}$$

なる表式（Polyakov=Wigmann公式）は期待できる．そこで，

$$c[g,h]:=\mathrm{WZ}[gh]-\mathrm{WZ}[g]-\mathrm{WZ}[h]-\frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\,[g^{-1}dghdh^{-1}] \tag{1.8}$$

と定義する．

- $c[g,h]$はg,hのホモトピー同値類にのみ依存する．

実際，g_tをホモトピーとすると，g_thもホモトピーであるから，

$$c[g_1,h]-c[g_0,h] \tag{1.9}$$

$$=\int_{M\times[0,1]}H(g_th)-\int_{M\times[0,1]}H(g_t)-\frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\,[g_1^{-1}dg_1hdh^{-1}]+\frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\,[g_0^{-1}dg_0hdh^{-1}] \tag{1.10}$$

$$=\int_{M\times[0,1]}H(h)+\frac{1}{4\pi}\int_{M\times[0,1]}d\ \mathrm{tr}\,[g_t^{-1}dg_thdh^{-1}]-\frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\,[g_1^{-1}dg_1hdh^{-1}]+\frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\,[g_0^{-1}dg_0hdh^{-1}] \tag{1.11}$$

$$=0. \tag{1.12}$$

hについても同様．よって，

$$c([g],[h])=c[g,h] \tag{1.13}$$

と書く．ホモトピー同値類にのみ依存するため，リーマン面の穴周りの寄与の和となるため，$M=T^2$の場合についてのみ計算すれば十分． $G=U(n),SO(n)$に対しては，$\pi_2[G]=0$であるため，ホモトピー同値類はトーラスの２つのサイクルにおけるホモトピー同値類を指定することによって定まる．

まず，$U(n)$の場合を考える．

$$g=\begin{pmatrix}e^{i(n_xx+n_yy)} & \\ & 1_{n-1}\end{pmatrix},\quad h=\begin{pmatrix}e^{i(m_xx+m_yy)} & \\ & 1_{n-1}\end{pmatrix} \tag{1.14}$$

とする． g,h,ghはトーラス上のある方向には依存しないため，

$$\mathrm{WZ}[g]=\mathrm{WZ}[h]=\mathrm{WZ}[gh]=0 \tag{1.15}$$

である．よって，

$$c([g],[h])=-\frac{1}{4\pi}\int_{T^2}\mathrm{tr}\,[g^{-1}dghdh^{-1}]=-\frac{1}{4\pi}\int_{T^2}(n_xm_y-n_ym_x)dxdy=-\pi(n_xm_y-n_ym_x)\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \tag{1.16}$$

$SO(n\geq 2)$の場合は，

$$g=\begin{pmatrix}e^{i(n_x\sigma_yx+n_y\sigma_yy)} & \\ & 1_{n-2}\end{pmatrix},\quad h=\begin{pmatrix}e^{i(m_x\sigma_yx+m_y\sigma_yy)} & \\ & 1_{n-2}\end{pmatrix} \tag{1.17}$$

として，

$$c([g],[h]) = -\frac{1}{4\pi}\int_{T^2} \mathrm{tr}\,[g^{-1}dghdh^{-1}] = -\frac{1}{4\pi}\int_{T^2} 2(n_x m_y - n_y m_x)dxdy = -2\pi(n_x m_y - n_y m_x) \in \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}. \tag{1.18}$$

いずれの場合も，g, hの巻き付き数にのみ依存してPW公式は$\mathbb{Z}_2$値だけ補正される．

直和の場合は，（1を付け足してg, hのサイズを合わせる）

$$\begin{aligned}
\mathrm{WZ}[g \oplus h] &= \mathrm{WZ}\left[\begin{pmatrix} gh^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h & \\ & h \end{pmatrix}\right] && (1.19)\\
&= \mathrm{WZ}\left[\begin{pmatrix} gh^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}\right] + \mathrm{WZ}\left[\begin{pmatrix} h & \\ & h \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\,[(gh^{-1})^{-1}d(gh^{-1})hdh^{-1}] + c([gh^{-1}], 2[h]) && (1.20)\\
&= \mathrm{WZ}[gh^{-1}] + 2\mathrm{WZ}[h] + \frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\,[(gh^{-1})^{-1}d(gh^{-1})hdh^{-1}] && (1.21)\\
&= \mathrm{WZ}[g] + \mathrm{WZ}[h] + \frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\,[g^{-1}dgh^{-1}dh] + c([g],[h^{-1}]) + \frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\,[(gh^{-1})^{-1}d(gh^{-1})hdh^{-1}] && (1.22)\\
&= \mathrm{WZ}[g] + \mathrm{WZ}[h] - c([g],[h]) && (1.23)
\end{aligned}$$

となり，同様の補正項が出現する．

References

[1] Krzysztof Gawedzki, Konrad Waldorf *Polyakov-Wiegmann Formula and Multiplicative Gerbes*, arXiv:0908.1130.