擬似逆行列

塩崎　謙

November 11, 2022

1 Moore–Penrose inverse

以下はwikipediaの記事[1]を参考にした．Aを$m\times n$行列とする．以下の4つの条件を満たす行列A^+をMoore-Penrose逆行列と呼ぶ．

1. $AA^+A=A$.
2. $A^+AA^+=A^+$.
3. AA^+はエルミート$(AA^+)^\dagger=AA^+$.
4. A^+Aはエルミート$(A^+A)^\dagger=A^+A$.

Aを特異値分解する．$r=\mathrm{rank}(A)$をAの階数とする．

$$A=U\begin{pmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}V^\dagger. \tag{1}$$

ここで，U,Vはそれぞれ$m\times m$, $n\times n$ユニタリ行列であり，

$$\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_r),\quad \sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_r>0, \tag{2}$$

はAの非ゼロの特異値を並べた$r\times r$対角行列である．上記4つの性質を満たすA^+の存在は

$$A^+=V\begin{pmatrix}\Sigma^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}U^\dagger \tag{3}$$

とすると，

$$AA^+=U\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}U^\dagger, \tag{4}$$

$$A^+A=V\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}V^\dagger \tag{5}$$

であるから，このA^+は1,2,3,4の全ての条件を満たす．この表式から，AA^+, A^+Aは直交射影であることがわかる．問題は一意性であるが，$\tilde{A}^+$を他の解とすると，条件3,4より，

$$AA^+=A\tilde{A}^+AA^+=(A\tilde{A}^+)^\dagger(AA^+)^\dagger=\tilde{A}^{+\dagger}A^\dagger A^{+\dagger}A^\dagger=\tilde{A}^{+\dagger}(AA^+A)^\dagger=\tilde{A}^{+\dagger}A^\dagger=(A\tilde{A}^+)^\dagger=A\tilde{A}^+. \tag{6}$$

同様に，

$$A^+A=\tilde{A}^+A\tilde{A}^+A=(\tilde{A}^+A)^\dagger(\tilde{A}^+A)^\dagger=A^\dagger\tilde{A}^{+\dagger}A^\dagger\tilde{A}^{+\dagger}=(A\tilde{A}^+A)^\dagger\tilde{A}^{+\dagger}=A^\dagger\tilde{A}^{+\dagger}=(\tilde{A}^+A)^\dagger=\tilde{A}^+A. \tag{7}$$

すると，

$$A^+=A^+AA^+=A^+A\tilde{A}^+=\tilde{A}^+A\tilde{A}^+=\tilde{A}^+ \tag{8}$$

より．

直交射影としての性質をまとめる．

$$f : V \to W, \quad f(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_m)A, \tag{9}$$

$$f(a_1, \dots, a_n)V = (b_1, \dots, b_m)U \begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}. \tag{10}$$

と表示するとわかるように，

- AA^+はIm Aへの直交射影．
- $1_m - AA^+$はIm Aの直交補空間$(\mathrm{Im}\, A)^\perp$への直交射影．
- A^+AはKer Aの直交補空間$(\mathrm{Ker}\, A)^\perp$への直交射影．
- $1_n - A^+A$はKer Aへの直交射影．

2　連立一次方程式の解

Aを$m \times n$複素行列として，方程式

$$Ax = b, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad b \in \mathbb{C}^m, \tag{11}$$

を考える．そもそも解xが存在しない場合もある．解xが存在する必要十分条件は，$b \in \mathrm{Im}\, A$である．直交射影を用いて条件を書くと，解が存在する条件は

$$AA^+b = b \tag{12}$$

である．この表式から，

$$x = A^+b \tag{13}$$

は解の一つである．解は一意ではなく，Ker Aだけの任意性がある．任意解は$w \in \mathbb{C}^n$を任意ベクトルとして，

$$x = A^+b + (1_n - A^+A)w \tag{14}$$

で与えられる．

References

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Moore%E2%80%93Penrose_inverse