$\mathbb{Z}_2$対称性のある1次元スピン系の断熱ポンプとBerry位相

塩崎　謙

August 25, 2022

Abstract

$\mathbb{Z}_2$対称性が存在するスピン鎖の断熱ポンプにおける，Berry位相の計算メモ．

1　スピン系，$\mathbb{Z}_2$対称性

模型は[1]

$$H_\theta^\sigma = -\sum_{j=1}^{L} B_j^\theta, \quad B_j^\theta = U_\theta \sigma_x U_\theta^\dagger, \tag{1}$$

であり，局所ユニタリ変換は境界条件に依存し，

$$U_\theta = e^{\frac{i\theta}{2}N_{\mathrm{dw}}}, \tag{2}$$

$$N_{\mathrm{dw}} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{L-1} \frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2} + \frac{1-\sigma_L^z\sigma_1^z}{2} & \text{(untwisted)}, \\ \sum_{j=1}^{L-1} \frac{1-\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z}{2} + \frac{1+\sigma_L^z\sigma_1^z}{2} & \text{(twisted)}, \end{cases} \tag{3}$$

である．

$$U_{2\pi} = \begin{cases} Id & \text{(untwisted)}, \\ -Id & \text{(twisted)}, \end{cases} \tag{4}$$

に注意． $\mathbb{Z}_2$対称性は

$$V = \prod_j \sigma_j^x. \tag{5}$$

規格化された基底状態は，

$$|\Psi_\theta\rangle = U_\theta |\Psi_0\rangle, \quad |\Psi_0\rangle = \frac{1}{2^{L/2}} \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_L} |\sigma_1\sigma_2\cdots\rangle. \tag{6}$$

U_θの周期性より，

$$|\Psi_{2\pi}\rangle = \begin{cases} |\Psi_0\rangle & \text{(untwisted)}, \\ -|\Psi_0\rangle & \text{(twisted)}, \end{cases} \tag{7}$$

に注意．パッチ変換からの位相はBerry位相に寄与することに注意．一方で，接続からの寄与もある．

$$\exp\int_0^{2\pi} \langle\Psi_\theta|d\Psi_\theta\rangle = \exp\int_0^{2\pi} \langle\Psi_0|U_\theta^\dagger dU_\theta|\Psi_0\rangle \tag{8}$$

$$= e^{\pi i \langle\Psi_0|N_{\mathrm{dw}}|\Psi_0\rangle}. \tag{9}$$

よって，基底状態$|\Psi_0\rangle$における磁壁の個数演算子N_{dw}の期待値を計算すれば良い．並進対称性と$\mathbb{Z}_2$のゲージ対称性$\sigma_j^x|\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle$より，

$$\langle\Psi_0|\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z|\Psi_0\rangle = 0 \tag{10}$$

であるので，各リンクにおける磁壁は期待値は1/2である．よって，境界条件に依存せず，

$$\langle\Psi_0|N_{\rm dw}|\Psi_0\rangle = \frac{L}{2} \tag{11}$$

となる．パッチ変換の寄与とまとめると，Berry位相は

$$e^{i\gamma} = \begin{cases} i^L & \text{(untwisted)}, \\ -i^L & \text{(twisted)}, \end{cases} \tag{12}$$

となり，比が-1に量子化する．

Berry位相の比は一般には量子化せず，$L\to\infty$において量子化すると期待できる．量子化しないフェルミオン系の例は[2]で与えた．ここでは対応するスピン系の模型で計算する．模型は，$r>0$として，規格化定数を別にして，

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N(r)}} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_L} r^{N_{\rm dw}/2}\,|\sigma_1\sigma_2\cdots\rangle \tag{13}$$

と，磁壁に重み$r^{1/2}$をつける． $N(r)$は規格化定数であり，

$$N(r) = \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_L} \langle\sigma_1\sigma_2\cdots|r^{N_{\rm dw}}|\sigma_1\sigma_2\cdots\rangle\,. \tag{14}$$

L個のリンクにl個の磁壁を配置する方法は$\binom{L}{l}$通りであり，スピンの反転で2倍であるから，周期境界条件の場合は偶数個，ねじれ境界条件の場合には奇数個の磁壁が存在するため，

$$N(r) = \sum_{l\in{\rm even/odd}} 2\binom{L}{l} r^l = (1+r)^L \pm (1-r)^L \tag{15}$$

となる． $N(r)$を用いて，磁壁の個数の期待値は以下のように計算できる．

$$\langle\Psi_0|N_{\rm dw}|\Psi_0\rangle = \frac{rN'(r)}{N(r)} = rL\frac{(1+r)^{L-1} \mp (1-r)^{L-1}}{(1+r)^L \pm (1-r)^L} \tag{16}$$

よって，周期境界条件とねじれ境界条件におけるBerry位相の比は，

$$\gamma_{\rm twisted} - \gamma_{\rm untwisted} = \pi + \pi rL\left[\frac{(1+r)^{L-1} + (1-r)^{L-1}}{(1+r)^L - (1-r)^L} - \frac{(1+r)^{L-1} - (1-r)^{L-1}}{(1+r)^L + (1-r)^L}\right] \tag{17}$$

$$= \pi + \frac{\pi rL}{1-r^2}\frac{1}{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^L - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^L}. \tag{18}$$

よって，Lに対して指数関数的にπに近づく．

References

[1] KS, arXiv:2110.10665.

[2] S. Ohyama, KS, M. Sato, arXiv:2206.01110.