$\mathbb{Q}$テンソルが完全性を保つこと

塩崎　謙

February 9, 2023

Abstract

小倉さんに，$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}$が完全性を保つことを教えて頂いたので，メモする．

環$\mathbb{Z}$はPID（Rの任意のイデアルは(f)のように書くことができる）である． $\mathbb{Q}$はねじれがない．すると一般論より，$\mathbb{Z}$加群$\mathbb{Q}$は平坦である．すると平坦性の定義より，$\mathbb{Z}$加群の完全列

$$0 \to L \to M \to N \to 0 \tag{1}$$

に対して，

$$0 \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N \to 0 \tag{2}$$

は完全列．（右側はいつでも成立し，左側が平坦性より．）

一般に，共変関手Fが短完全列を短完全列に移すとき，列の完全性が保たれることを示す．

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \tag{3}$$

を完全列とする．

$$FL \xrightarrow{F(f)} M \xrightarrow{F(g)} FN \tag{4}$$

において，$\operatorname{Im} F(f) = \operatorname{Ker} F(g)$を示したい．完全列

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to L \xrightarrow{\mathrm{coim} f} \operatorname{Im} f \to 0, \tag{5}$$

$$0 \to \operatorname{Im} f \xrightarrow{\mathrm{im} f} M \xrightarrow{\mathrm{coim} g} \operatorname{Im} g \to 0, \tag{6}$$

$$0 \to \operatorname{Im} g \xrightarrow{\mathrm{im} g} N \to \operatorname{Coker} g \to 0, \tag{7}$$

に注意する． Fは短完全列を短完全列に移すから，

$$0 \to F(\operatorname{Ker} f) \to FL \to F(\operatorname{Im} f) \to 0, \tag{8}$$

$$0 \to F(\operatorname{Im} f) \to FM \to F(\operatorname{Im} g) \to 0, \tag{9}$$

$$0 \to F(\operatorname{Im} g) \to FN \to F(\operatorname{Coker} g) \to 0, \tag{10}$$

も完全列． $F(\mathrm{im} f)$は全射であるから，

$$\operatorname{Im} F(f) = \operatorname{Im} F(\mathrm{im} f \circ \mathrm{coim} f) = \operatorname{Im} F(\mathrm{im} f) \circ F(\mathrm{coim} f) = \operatorname{Im} F(\mathrm{im} f). \tag{11}$$

$F(\mathrm{coim} f)$は単射であるから，

$$\operatorname{Ker} F(g) = \operatorname{Ker} F(\mathrm{im} g \circ \mathrm{coim} g) = \operatorname{Ker} F(\mathrm{im} g) \circ F(\mathrm{coim} g) = \operatorname{Ker} F(\mathrm{coim} g). \tag{12}$$

また，２番目の完全列より

$$\operatorname{Im} F(\mathrm{im} f) = \operatorname{Ker} F(\mathrm{coim} g) \tag{13}$$

である．よって示された．