

$RP^2 \times S^1, L(3, 1) \times S^1$ 上のスピン鎖の模型

塩崎 謙

December 26, 2022

1 $RP^2 \times S^1$ 模型

$RP^2 \times S^1$ 上のクラスター模型を構成したい。 σ スピンの磁壁に対して、

- $\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow$ に対しては、 RP^2 上の \mathbb{Z}_2 非自明な波動関数、
- $\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow$ に対しては、 RP^2 上の \mathbb{Z}_2 自明な波動関数、

なる条件を満たすdecorated domain wall(DDW)をまずは構成する。 RP^2 上の \mathbb{Z}_2 非自明な波動関数は、以下で与えることが簡単：

$$|u(\mathbf{n})\rangle = \begin{pmatrix} n_z \\ n_x + in_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} \in S^2. \quad (1)$$

ここで、

$$|-\mathbf{n}\rangle = -|\mathbf{n}\rangle \quad (2)$$

に注意すると、状態 $|\mathbf{n}\rangle$ は $RP^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$ 上の状態であることがわかる。また、 $|\mathbf{n}\rangle$ の第一Chern類 $c_1 \in H^2(RP^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ を計算すると、非自明であることがわかる[1]。(注意として、 $|\mathbf{n}\rangle$ から計算されるBerry曲率は非ゼロであり、Berry接続は平坦ではない。) また、 RP^2 上の \mathbb{Z}_2 自明な波動関数は、例えば RP^2 依存しない

$$|\text{triv}(\mathbf{n})\rangle = (1) \quad (3)$$

である。

以上を実装する。サイトにスピン1/2自由度を配置し、ボンドに RP^2 非自明と自明状態を記述する次元3のヒルベルト空間を導入する。ボンドのヒルベルト空間の基底として、 \mathbf{n} 依存する以下の基底を考える。

$$(|u(\mathbf{n})\rangle, |v(\mathbf{n})\rangle, |w(\mathbf{n})\rangle) = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y & 0 \\ n_x + in_y & -n_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

この基底は、標準基底に対する以下のユニタリ変換によって与えられることに注意する。

$$(|u(\mathbf{n})\rangle, |v(\mathbf{n})\rangle, |w(\mathbf{n})\rangle) = U(\mathbf{n}) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad U(\mathbf{n}) := \begin{pmatrix} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} & \\ & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

ここで、 $\boldsymbol{\tau}$ は \mathbb{C}^3 の部分空間 \mathbb{C}^2 におけるパウリ行列である。 $U(-\mathbf{n}) \neq U(\mathbf{n})$ であるので、ユニタリ変換 $U(\mathbf{n})$ によって得られる模型、状態は一般には S^2 上の状態であって RP^2 上でないが、

$$U(-\mathbf{n}) = U(\mathbf{n})Z, \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

であるため、模型、状態が Z 対称性を持つ場合は RP^2 上の模型が $U(\mathbf{n})$ によって得られることに注意する。

DDW状態を基底状態の集合としてもつハミルトニアンを

$$H_{\text{DDW}}(\mathbf{n}) = - \sum_j \sigma_j^z (-|u(\mathbf{n})\rangle \langle u(\mathbf{n})| + |w(\mathbf{n})\rangle \langle w(\mathbf{n})|)_{j+1/2} \sigma_{j+1}^z \quad (7)$$

$$= - \sum_j \sigma_j^z \begin{pmatrix} n_z^2 & (n_x - in_y)n_z & 0 \\ (n_x + in_y)n_z & n_x^2 + n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{j+1/2} \sigma_{j+1}^z \quad (8)$$

$$(9)$$

とする。 $H_{\text{DDW}}(-\mathbf{n}) = H_{\text{DDW}}(\mathbf{n})$ を満たすため RP^2 上の模型である。状態 $|v(\mathbf{n})\rangle$ を用いる必要はない。 $H_{\text{DDW}}(\mathbf{n})$ は、ユニタリ変換を用いると

$$H_{\text{DDW}}(\mathbf{n}) = U(\mathbf{n}) H_{\text{DDW}}^0 U(\mathbf{n})^{-1}, \quad (10)$$

$$H_{\text{DDW}}^0 = - \sum_j \sigma_j^z \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{j+1/2} \sigma_{j+1}^z \quad (11)$$

と書くこともできる。 H_{DDW}^0 は Z 対称性を有することに注意。

DDW状態を混ぜる項は以下で与えられる。

$$H_{\text{fl}}(\mathbf{n}) = U(\mathbf{n}) H_{\text{fl}}^0 U(\mathbf{n})^{-1}, \quad (12)$$

$$H_{\text{fl}}^0 = - \sum_j \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}_{j-1/2} \sigma_j^x \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}_{j+1/2}. \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix} Z = -Z \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad (14)$$

であるため、 (-1) 因子がキャンセルし、 H_{fl}^0 は Z 対称性を有する。よって、 $H_{\text{fl}}(\mathbf{n})$ は RP^2 上の模型である。もちろん、この点は直接確認することもでき、

$$H_{\text{fl}}(\mathbf{n}) = - \sum_j \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_x + in_y \\ n_z & n_x - in_y & 0 \end{pmatrix}_{j-1/2} \sigma_j^x \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_x + in_y \\ n_z & n_x - in_y & 0 \end{pmatrix}_{j+1/2} \quad (15)$$

となる。

最後に、断熱発展の S^1 方向のパラメータ依存性は、ユニタリ変換

$$V(t) = \prod_j e^{-\frac{it}{4} \sigma_j^x} \quad (16)$$

とする。

$$V(2\pi) \sim \prod_j \sigma_j^x \quad (17)$$

は \mathbb{Z}_2 対称性の演算子であるが、模型は \mathbb{Z}_2 対称性を有するので、ハミルトニアンは $t \in [0, 2\pi]$ において周期的。

以上をまとめると、模型は以下である。

$$H(\mathbf{n}, t) = V(t)U(\mathbf{n})H^0U(\mathbf{n})^{-1}V(t)^{-1}, \quad (18)$$

$$H^0 = -\sum_j \sigma_j^z \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{j+1/2} \sigma_{j+1}^z - \sum_j \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}_{j-1/2} \sigma_j^x \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}_{j+1/2}, \quad (19)$$

$$U(\mathbf{n}) = \bigotimes_j \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y & 0 \\ n_x + in_y & -n_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{j+1/2}, \quad (20)$$

$$V(t) = \prod_j e^{-\frac{it}{4}\sigma_j^x}. \quad (21)$$

$S^2 \times S^1$ 模型についてのコメント—

同様の方法で、Chern数1の波動関数がポンプされる $S^2 \times S^1$ 模型を得ることはできない。変更点は、 $\mathbf{n} = (\theta, \phi)$ と極座標表示して、

$$U'(\theta, \phi) := (|u'(\mathbf{n})\rangle, |v'(\mathbf{n})\rangle, |w'(\mathbf{n})\rangle) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} & 0 \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & -\cos \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

と定義する点であるが、このゲージで南極点 $\theta = \pi$ は

$$U'(\theta = \pi, \phi) := \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ e^{i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

となり、 ϕ 依存性が残る。一方で、ハミルトニアン H^0 はこのユニタリ変換 $U'(\theta = \pi, \phi)$ とは可換ではないため、 S^2 上の模型をユニタリ変換 $U'(\theta, \phi)$ を用いて構成することができない。

また、上で構成した $RP^2 \times S^1$ 上のハミルトニアン $H(\mathbf{n}, t)$ は、 $S^2 \times S^1$ 上の模型とみなすことができるが、状態 $|u(\mathbf{n})\rangle$ の S^2 上のChern数はゼロである。

1.1 MPS

クラスター模型のMPSから出発する。

$$H = -\sum_j \sigma_{j-1}^z \sigma_j^x \sigma_{j+1}^z. \quad (24)$$

MPSは

$$A^\uparrow = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

このMPSに自由度を付け足して、ユニタリ変換を施せば、 $RP^2 \times S^1$ 模型のMPSが得られる。

2 $L(3, 1) \times S^1$ 模型

同様にして、 $L(3, 1) \times S^1$ 模型の構成もできる。レンズ空間 $L(3, 1)$ は

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} / (z_1, z_2) \sim (\omega z_1, \omega z_2), \quad \omega = e^{2\pi i/3} \quad (26)$$

で与えられる。 (z_1, z_2) は S^3 上の点とみなすことができる。 (z_1, z_2) でパラメタ付けされた3つの基底を

$$U = (|u_0\rangle, |u_1\rangle, |u_2\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & z_2^* \\ 0 & z_2 & -z_1^* \end{pmatrix} \quad (27)$$

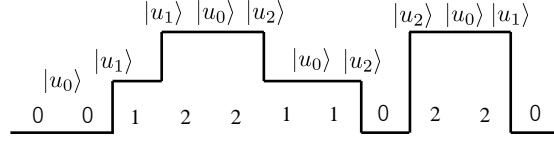


Figure 1

と導入する。 \mathbb{Z}_3 変換に対して、

$$U \mapsto (|u_0\rangle, \omega |u_1\rangle, \omega^2 |u_2\rangle) = UZ_\tau, \quad Z_\tau = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega^2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

と振る舞う。ボンド上に $|u_0\rangle, |u_1\rangle, |u_2\rangle$ で張られるヒルベルト空間を用意する。

サイトに \mathbb{Z}_3 の群環の自由度を置き、 $\sigma_j \in \{0, 1, 2\}$ と書く。

$$\Delta\sigma_j = \sigma_{j+1} - \sigma_j \pmod{3} \quad (29)$$

として、状態

$$|\sigma_1\sigma_2\cdots\rangle \quad (30)$$

に対して、 Δ_j に応じてボンド上の状態を

- $\Delta\sigma_j = 0$ のとき、 $|u_0\rangle$,
- $\Delta\sigma_j = 1$ のとき、 $|u_1\rangle$,
- $\Delta\sigma_j = 2$ のとき、 $|u_2\rangle$,

なる規則でDDW状態を構成する。図を見よ。ポイントは、PBCにおいては差の和が一定：

$$\sum_j \Delta\sigma_j = 0 \pmod{3}, \quad (31)$$

であるから、ボンドにおける \mathbb{Z}_3 変換に対して、

$$|\text{DDW}\rangle \mapsto |\text{DDW}\rangle \prod_j \omega^{\Delta\sigma_j} = |\text{DDW}\rangle \omega^{\sum_j \Delta\sigma_j} = |\text{DDW}\rangle \quad (32)$$

となり、 \mathbb{Z}_3 不変である。したがって、DDW状態の同一重みによる和

$$|\text{SG}\rangle = \sum_{\text{DDW}} |\text{DDW}\rangle \quad (33)$$

は \mathbb{Z}_3 不変である。また、サイト上のスピンを入れ替える \mathbb{Z}_3 変換

$$X_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

に対しても不変である。(つまり、 $\mathbb{Z}_3^g \times \mathbb{Z}_3^t$ 不変である。おそらく、この模型は $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 対称なSPT相の模型である。)

S^1 依存性については、 $t = 2\pi$ において、サイト上の \mathbb{Z}_3 スピンを入れ替える変換 X_τ となるように構成すれば良い。つまり、 S^1 依存性は、 t 依存するユニタリ変換

$$V(t) = W \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{\frac{it}{3}} & \\ & & e^{\frac{2it}{3}} \end{pmatrix} W^\dagger, \quad W = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

として導入すれば良い。

$$V(2\pi) = X_\sigma \quad (36)$$

である。

References

- [1] Ken Shiozaki, Masatoshi Sato, Kiyonori Gomi, *Topological Crystalline Materials - General Formulation, Module Structure, and Wallpaper Groups -*, arXiv:1701.08725 .