メモ：第2 Stiefel=Whitney類の再定義(?)について

塩崎謙

November 15, 2024

Whitney和公式

$$w(E+F) = w(E)w(F) \tag{0.1}$$

より

$$w_1(E+F) = w_1(E) + w_1(F), \tag{0.2}$$

$$w_2(E+F) = w_2(E) + w_2(F) + w_1(E)w_1(F), \tag{0.3}$$

が導かれる．

$$w_2'(E+F) = w_2'(E) + w_2'(F) \tag{0.4}$$

が成立するようにw_2を再定義できるかどうかを考えたい． Quadratic refinement に似ている．一般に，$\mathbb{Z}_2$値の対称双線型形式$b(x,y)$に対して，$\mathbb{Z}_2$値の関数$q(x)$であって

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + b(x,y) \tag{0.5}$$

を満たすものが存在する． qは quadratic refinementと呼ばれる． qは一意ではない．

$$b(E,F) := w_1(E)w_1(F) \tag{0.6}$$

は対称双線型形式である．よって，quadratic refinement $q(E)$が存在する．このqを用いて

$$w_2'(E) := w_2(E) + q(E) \tag{0.7}$$

と定義すると，

$$w_2'(E+F) = w_2(E+F) + q(E+F) \tag{0.8}$$

$$= w_2(E) + w_2(F) + w_1(E)w_1(F) + q(E) + q(F) + w_1(E)w_1(F) \tag{0.9}$$

$$= w_2'(E) + w_2'(F) \tag{0.10}$$

が成立する．

$q(E)$の選び方であるが，

$$E = \oplus n_i E_i \tag{0.11}$$

なる分解が任意の実バンドルEに対して一意的に存在すると仮定すると，

$$b_{ij} = b(E_i, E_j) = w_1(E_i)w_1(E_j) \tag{0.12}$$

として

$$q(E) := \sum_{i<j} n_i n_j b_{ij} = \sum_{i<j} n_i n_j w_1(E_i) w_1(E_j) \tag{0.13}$$

とすれば良い．実際，

$$q(E+E') = \sum_{i<j}(n_i+n'_i)(n_j+n'_j)w_1(E_i)w_1(E_j) = q(E)+q(E')+\sum_{i\neq j} n_i n'_j w_1(E_i)w_1(E_j) \tag{0.14}$$

$$= q(E)+q(E')+\sum_{i,j} n_i n'_j w_1(E_i)w_1(E_j) = q(E)+q(E')+w_1(E)w_1(E'). \tag{0.15}$$

ここで，$w_1(E)w_1(E)=0$を用いた．またこの構成は

$$q(\underline{\mathbb{R}}) = 0 \tag{0.16}$$

を満たすため，$w'_2(\underline{R})=0$を満たす．

しかしそもそもEが一意的に分解されるような基底E_iの数とその係数n_iも特徴づけがトポロジカル不変量に他ならないので，これでは解きたい問題の答えを使って問題を解いているようなもので，意味のない構成だ．