スペクトル系列の公理（書きかけ）

塩崎　謙

August 10, 2024

1　公理

[1]の15章に従って，スペクトル系列の公理（7節）と，その帰結をまとめる．

$p, q \in \mathbb{Z}, -\infty \leq p \leq q \leq \infty$に対して加群$H(p,q)$が定められているものとする．

$$H(p) = H(p,\infty), \quad H = H(-\infty) = H(-\infty,\infty) \tag{1.1}$$

などと書く．記号

$$(p,q) \leq (p',q') \Leftrightarrow p \leq p', q \leq q' \tag{1.2}$$

を導入する．$(p,q,r) \leq (p',q',r')$も同様.

以下が公理（[1]のXV章7節）.

以下の準同型が定義されているものとする：

$$H(p',q') \to H(p,q), \quad (p,q) \leq (p',q'), \tag{1.3}$$

$$H(p,q) \xrightarrow{\delta} H(q,r), \quad -\infty \leq p \leq q \leq r \leq \infty. \tag{1.4}$$

(SP.1) 以下は同型写像.

$$H(p,q) \xrightarrow{\cong} H(p,q) \tag{1.5}$$

(SP.2) $(p,q) \leq (p',q') \leq (p'',q'')$に対して，以下が可換図式.

$$\begin{tikzcd} H(p'',q'') \arrow[r] \arrow[dr] & H(p,q) \\ & H(p',q') \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

(SP.3) $(p,q,r) \leq (p',q',r')$に対して，以下が可換図式.

$$\begin{tikzcd} H(p',q') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H(q',r') \arrow[d] \\ H(p,q) \arrow[r, "\delta"] & H(q,r) \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

(SP.4) $p \leq q \leq r$に対して，以下が完全列．

$$\cdots \to H(q,r) \to H(p,r) \to H(p,q) \xrightarrow{\delta} H(q,r) \to \cdots \tag{1.8}$$

(SP.5) qを固定する．直系（direct system）

$$H(q,q) \to H(q-1,q) \to \cdots \to H(p,q) \to H(p-1,q) \to \cdots \to H(-\infty,q) \tag{1.9}$$

は，$H(-\infty,q)$を直極限（direct limit）として持つ．

1 つ目の準同型$H(p',q') \to H(p,q)$は特に記号を書かない． $H(p,q)$が次数を持つ場合は， 1 つ目の準同型は次数0，δは次数1を想定する．

また注意として，(SP.4)において，次数付きの場合は，δは次数を変化させるため， 1 週で次数が 1 だけ変化していることに注意． (SP.5)は包含写像ではない． (SP.1), (SP.4)より，

$$\to H(p,p) \xrightarrow{\cong} H(p,p) \xrightarrow{\cong} H(p,p) \xrightarrow{\delta} H(p,p) \to \tag{1.10}$$

が完全列であるから，

$$H(p,p) = 0 \tag{1.11}$$

でないと矛盾する．

2 弱い公理

[1]ではδの定義において，$r = \infty$とした

$$\delta : H(p,q) \to H(q), \quad p \leq q \tag{2.1}$$

のみを定義しても上の公理が導かれると主張されている．この点を検討する．

以下の弱い公理を考える．

以下の準同型が定義されているものとする：

$$H(p',q') \to H(p,q), \quad (p,q) \leq (p',q'), \tag{2.2}$$

$$H(p,q) \xrightarrow{\delta} H(q), \quad -\infty \leq p \leq q \leq \infty. \tag{2.3}$$

(SP.1) 以下は同型写像.

$$H(p,q) \xrightarrow{\cong} H(p,q) \tag{2.4}$$

(SP.2) $(p,q) \leq (p',q') \leq (p'',q'')$に対して，以下が可換図式.

$$\begin{tikzcd} H(p'',q'') \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(p,q) \\ & H(p',q') \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

(SP.3') $(p,q) \le (p',q')$に対して，以下が可換図式.

$$
\begin{tikzcd}
H(p',q') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H(q') \arrow[d] \\
H(p,q) \arrow[r, "\delta"] & H(q)
\end{tikzcd}
\tag{2.6}
$$

(SP.4') $p \le q$に対して，以下が完全列.

$$
\cdots \to H(q) \to H(p) \to H(p,q) \xrightarrow{\delta} H(q) \to \cdots \tag{2.7}
$$

(SP.5) qを固定する．直系（direct system）

$$
H(q,q) \to H(q-1,q) \to \cdots \to H(p,q) \to H(p-1,q) \to \cdots \to H(-\infty,q) \tag{2.8}
$$

は，$H(-\infty,q)$を直極限（direct limit）として持つ.

連結準同型

$$
H(p,q) \xrightarrow{\delta} H(q) \to H(q,r), \quad p \le q \le r, \tag{2.9}
$$

より，$\delta' : H(p,q) \xrightarrow{\delta} H(q,r)$が定義されることに注意．[1]の主張は，上の弱い公理が前節の公理を導く，とのこと.

(SP.2), (SP.3')より，可換図式を右に伸ばして

$$
\begin{tikzcd}
H(p',q') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H(q') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & H(q',r') \arrow[d] \\
H(p,q) \arrow[r, "\delta"] & H(q) \arrow[r] & H(q,r)
\end{tikzcd}
\tag{2.10}
$$

となり，(SP.3)を得る.

(SP.4)を導出する．以下が完全列であることを証明する.

$$
\longrightarrow H(q,r) \xrightarrow{i'} H(p,r) \xrightarrow{j'} H(p,q) \xrightarrow{\delta'} H(q,r) \longrightarrow \tag{2.11}
$$

まず，$\ker\delta' = \operatorname{im} j'$を示す．以下は可換図式であり，下付き添字が共通の$i, j, \delta$については完全.

$$
\begin{tikzcd}
H(p) & & \\
H(r) \arrow[u, "i_{pr}"] \arrow[r, "i_{qr}"] & H(q) \arrow[ul, "i_{pq}"'] \arrow[dr, "j_{qr}"] & \\
H(p,r) \arrow[u, "\delta_{pr}"] \arrow[r, "j'"] & H(p,q) \arrow[u, "\delta_{pq}"] \arrow[r, "\delta'"] & H(q,r) \\
H(p) \arrow[u, "j_{pr}"] \arrow[ur, "j_{pq}"] & &
\end{tikzcd}
\tag{2.12}
$$

図式より，

$$
\delta' j' = j_{qr}\delta_{pq} j' = j_{qr} i_{qr} \delta_{pr} = 0. \tag{2.13}
$$

$\delta'(x)=0$とすると，$j_{qr}\delta_{pq}(x)=0$より，$y\in H(r)$が存在して，$\delta_{pq}(x)=i_{qr}(y)$．すると，$i_{pr}(y)=i_{pq}i_{qr}(y)=i_{pq}\delta_{pq}(y)=0$より，$z\in H(p,r)$が存在して$y=\delta_{pr}(z)$．よって，

$$\delta_{pq}(x)=i_{qr}(y)=i_{qr}\delta_{pr}(z)=\delta_{pq}j'(z) \tag{2.14}$$

であるので，$x-j'(z)\in\ker\delta_{pq}=\operatorname{im}j_{pq}=\operatorname{im}j'j_{pr}$より，$x\in\operatorname{im}j'$.

次に$\ker i'=\operatorname{im}\delta'$を示す．以下は可換図式であり，下付き添字が共通の$i,j,\delta$については完全.

$$\begin{tikzcd}
 & H(r) \arrow[d, "i_{qr}"] \arrow[dr, "i_{pr}"] & \\
 & H(q) \arrow[r, "i_{pq}"] \arrow[d, "j_{qr}"] & H(p) \arrow[d, "j_{pr}"] \\
H(p,q) \arrow[ur, "\delta_{pq}"] \arrow[r, "\delta'"] & H(q,r) \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\delta_{qr}"] & H(p,r) \arrow[dl, "\delta_{pr}"] \\
 & H(r) &
\end{tikzcd} \tag{2.15}$$

図式より，

$$i'\delta'=i'j_{qr}\delta_{pq}=j_{pr}i_{pq}\delta_{pq}=0. \tag{2.16}$$

$i'(x)=0$とすると， $\delta_{pr}i'(x)=\delta_{qr}(x)=0$より$x=j_{qr}(y),y\in H(q)$とおける．すると，$0=i'(x)=i'j_{qr}(y)=j_{pr}i_{pq}(y)$より，$i_{pq}(y)=i_{pr}(z)=i_{pq}i_{qr}(z),z\in H(r)$とおける．したがって，$y-i_{qr}(z)\in\ker i_{pq}=\operatorname{im}\delta_{pq}$より， $y=i_{qr}(z)+\delta_{pq}(w),w\in H(p,q)$とおける．したがって，

$$x=j_{qr}(y)=j_{qr}\delta_{pq}(w)=\delta'(w). \tag{2.17}$$

最後に，$\ker j'=\operatorname{im}i'$を示す．まず，$j'i'=0$は以下の可換図式より．

$$\begin{tikzcd}
H(q,r) \arrow[r, "i'"] \arrow[dr] & H(p,r) \arrow[r, "j'"] & H(p,q) \\
 & H(q,q)=0 \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{2.18}$$

$\ker j'\subset\operatorname{im}i'$を示すには以下の可換図式を用いる.

$$\begin{tikzcd}
H(q) \arrow[r, "i_{pq}"] \arrow[d, "i_{qr}"] & H(p) \arrow[d, "j_{pr}"] \arrow[dr, "j_{pq}"] & \\
H(q,r) \arrow[r, "i'"] \arrow[dr, "\delta_{qr}"] & H(p,r) \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\delta_{pr}"] & H(p,q) \arrow[d, "\delta_{pq}"] \\
 & H(r) \arrow[r, "i_{qr}"] & H(q)
\end{tikzcd} \tag{2.19}$$

$j'(x)=0$とすると，$\delta_{pq}j'(x)=i_{qr}\delta_{pr}(x)=0$より，$\delta_{pr}(x)=\delta_{qr}(y)=\delta_{pr}i'(y),y\in H(q,r)$とおける．すると，$x-i'(y)\in\ker\delta_{pr}=\operatorname{im}j_{pr}$より，$x=i'(y)+j_{pr}(z),z\in H(p)$とおける．すると，$0=j'(x)=j'j_{pr}(z)=j_{pq}(z)$より，$z=i_{pq}(w),w\in H(q)$とおける．よって，

$$x=i'(y)+j_{pr}i_{pq}(w)=i'(y)+i'i_{qr}(w)\in\operatorname{im}i'. \tag{2.20}$$

以上より，(SP.4)が示された. $\square$

この証明中で出てきたが，$p\le q\le r$に対して，準同型

$$H(q,r)\to H(p,q) \tag{2.21}$$

は$H(q,q)=0$を経由するので，常にゼロマップであることに注意.

2.1 例：一般ホモロジー理論

例として，可逆相の分類を念頭に，一般ホモロジー理論のAtiyah=Hirzebruchスペクトル系列の場合について上記の公理が満たされているかどうかを確認する．

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_d = X \tag{2.22}$$

を空間Xの filtrationとする．

$$H(p,q) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} h_n(X_{-p}, X_{-q}), \quad p \leq q, \tag{2.23}$$

とする．以下では(p,q)は$p \geq q$を意味するものとする．

- $h_n(X_{p'}, X_{q'}) \to h_n(X_p, X_q), (p,q) \geq (p',q')$は包含が誘導する準同型．
- $\delta : h_n(X_p, X_q) \to h_{n-1}(X_q)$は境界準同型．
- $(p'', q'') \leq (p', q') \leq (p,q)$に対して図式

$$\begin{tikzcd} h_n(X_{p''}, X_{q''}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & h_n(X_p, X_q) \\ & h_n(X_{p'}, X_{q'}) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{2.24}$$

  の可換性は包含の連結より．
- $(p', q') \leq (p,q)$に対して図式

$$\begin{tikzcd} h_n(X_{p'}, X_{q'}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & h_{n-1}(X_{q'}) \arrow[d] \\ h_n(X_p, X_q) \arrow[r, "\delta"] & h_{n-1}(X_q) \end{tikzcd} \tag{2.25}$$

  の可換性も境界作用素と包含射の可換性より．
- $p \geq q$に対して

$$\cdots \to h_n(X_q) \to h_n(X_p) \to h_n(X_p, X_q) \xrightarrow{\delta} h_{n-1}(X_q) \to \cdots \tag{2.26}$$

  は対に対する長完全列より．
- 直系

$$0 = h_n(X_q, X_q) \to h_n(X_{q-1}, X_q) \to \cdots \to h_n(X_p, X_q) \to h_n(X_{p-1}, X_q) \to \cdots \to h_n(X, X_q) \tag{2.27}$$

  において極限$h_n(X, X_q)$の存在は，Xが有限次元であれば保証される．

3 公理から従うこと

まず，次を確認する．

Lemma 3.1 (Lemma 1.1 in [1]). 以下の可換図式において，行は完全とする．

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
A' \arrow[ur] \arrow[r, "\phi'"] & A \arrow[r, "\eta"] & A''
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

このとき，ηは以下の同型写像を与える：

$$\operatorname{im}\phi/\operatorname{im}\phi' \cong \operatorname{im}\psi. \tag{3.2}$$

（証明）図式の可換性より$\operatorname{im}\phi' \subset \operatorname{im}\phi$に注意． $\operatorname{im}\phi/\operatorname{im}\phi' = \operatorname{im}\phi/\ker\eta$である． $\phi(c)+\ker\eta \in \operatorname{im}\phi/\ker\eta$に対して， $\eta(\phi(c)+\ker\eta) = \eta(\phi(c)) = \psi(c)$である． $c' \in \ker\phi$なる元に対しては，$\psi(c')=0$であるため，well-definedな$\eta : \operatorname{im}\phi/\ker\eta \to \operatorname{im}\psi$が定まる．

逆写像は，$y \in \operatorname{im}\psi$に対して，$y = \psi(c) = \eta(\phi(c))$なる$c \in C$をひとつ定めると，$\phi(c) \in \operatorname{im}\phi$がup to $\ker\eta$でひとつ定まる．つまり，$\phi(c)+\ker\eta \in \operatorname{im}\phi/\ker\eta$が定まる． cの選び方の不定性は$\psi(c) = \eta(\phi(c)) = 0$とすると，$\phi(c) \in \ker\eta = 0 \in \operatorname{im}\phi/\ker\eta$より． □

次の記号を導入する．

$$F^pH = \operatorname{im}[H(p) \to H], \tag{3.3}$$

$$Z_r^p = \operatorname{im}[H(p,p+r) \to H(p,p+1)], \quad r \geq 1, \tag{3.4}$$

$$B_r^p = \operatorname{im}[H(p-r+1,p) \xrightarrow{\delta} H(p,p+1)], \quad r \geq 1, \tag{3.5}$$

$$E_r^p = Z_r^p/B_r^p, \quad r \geq 1. \tag{3.6}$$

1) 次のHの filtration がある．

$$\cdots \subset F^{p+1}H \subset F^pH \subset \cdots \subset F^{-\infty}H = H. \tag{3.7}$$

（証明）以下の図式の可換性より．

$$\begin{tikzcd}
H(p+1) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H \\
& H(p) \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

2) 次の包含関係がある．

$$\cdots B_r^p \subset B_{r+1}^p \subset \cdots B_\infty^p \subset Z_\infty^p \subset \cdots \subset Z_{r+1}^p \subset Z_r^p \subset \cdots \tag{3.9}$$

（証明） $B_r^p \subset B_{r+1}^p$は，以下の図式の可換性より．

$$\begin{tikzcd}
H(p-r+1,p) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H(p,p+1) \arrow[d, "\cong"] \\
H(p-r,p) \arrow[r, "\delta"] & H(p,p+1)
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

$Z_{r+1}^p \subset Z_r^p$は，以下の図式の可換性より．

$$\begin{tikzcd}
H(p,p+r+1) \arrow[r] \arrow[d] & H(p,p+1) \arrow[d, "\cong"] \\
H(p,p+r) \arrow[r] & H(p,p+1)
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

$B_\infty^p \subset Z_\infty^p$は，以下の図式の可換性より．

$$\begin{tikzcd} H(-\infty,p) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\cong"] & H(p,\infty) \arrow[d] \\ H(-\infty,p) \arrow[r, "\delta"] & H(p,p+1) \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

3) 次の同型がある．

$$\delta_r^p : Z_r^p / Z_{r+1}^p \cong B_{r+1}^{p+r} / B_r^{p+r} \tag{3.13}$$

（証明）以下の可換図式において，行は完全．

$$\begin{tikzcd} & H(p,p+r) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ H(p,p+r+1) \arrow[ur] \arrow[r] & H(p,p+1) \arrow[r, "\delta"] & H(p+1,p+r+1) \end{tikzcd} \tag{3.14}$$

ここで，右上は以下の連結準同型．

$$H(p,p+r) \xrightarrow{\delta} H(p+r,p+r+1) \to H(p+1,p+r+1). \tag{3.15}$$

すると，上の補題より，

$$\mathrm{im}\,[H(p,p+r) \to H(p,p+1)]/\mathrm{im}\,[H(p,p+r+1) \to H(p,p+1)] \tag{3.16}$$
$$\cong \mathrm{im}\,[H(p,p+r) \to H(p+1,p+r+1)]. \tag{3.17}$$

これは

$$Z_r^p / Z_{r+1}^p \cong \mathrm{im}\,[H(p,p+r) \to H(p+1,p+r+1)]. \tag{3.18}$$

また，以下の可換図式において，行は完全．

$$\begin{tikzcd} & H(p,p+r) \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr] & \\ H(p+1,p+r) \arrow[ur] \arrow[r, "\delta"] & H(p+r,p+r+1) \arrow[r] & H(p+1,p+r+1) \end{tikzcd} \tag{3.19}$$

再び上の補題より，

$$\mathrm{im}\,[H(p,p+r) \xrightarrow{\delta} H(p+r,p+r+1)]/\mathrm{im}\,[H(p+1,p+r) \xrightarrow{\delta} H(p+r,p+r+1)] \tag{3.20}$$
$$\cong \mathrm{im}\,[H(p,p+r) \to H(p+1,p+r+1)]. \tag{3.21}$$

これは

$$B_r^{p+r+1} / B_{r+1}^{p+r} \cong \mathrm{im}\,[H(p,p+r) \to H(p+1,p+r+1)]. \tag{3.22}$$

以上より，

$$Z_r^p / Z_{r+1}^p \cong \mathrm{im}\,[H(p,p+r) \to H(p+1,p+r+1)] \cong B_r^{p+r+1} / B_{r+1}^{p+r}. \quad \square \tag{3.23}$$

この同型写像を

$$\delta_r^p : Z_r^p / Z_{r+1}^p \cong B_r^{p+r+1} / B_{r+1}^{p+r} \tag{3.24}$$

と書く．次の連結準同型

$$E_r^p = Z_r^p/B_r^p \twoheadrightarrow Z_r^p/Z_{r+1}^p \xrightarrow[\cong]{\delta_r^p} B_{r+1}^{p+r}/B_r^{p+r} \hookrightarrow Z_r^{p+r}/B_r^{p+r} = E_r^{p+r}. \tag{3.25}$$

を

$$d_r^p : E_r^p \to E_r^{p+r} \tag{3.26}$$

と書く．すると，

$$\ker d_r^p = \ker[Z_r^p/B_r^p \to Z_r^p/Z_{r+1}^p] \cong Z_{r+1}^p/B_r^p, \tag{3.27}$$

$$\operatorname{im} d_r^p = \operatorname{im}[B_{r+1}^{p+r}/B_r^{p+r} \hookrightarrow Z_r^{p+r}/B_r^{p+r}] \cong B_{r+1}^{p+r}/B_r^{p+r} \tag{3.28}$$

を得る．これから，列

$$E_r^{p-r} \xrightarrow{d_r^{p-r}} E_r^p \xrightarrow{d_r^p} E_r^{p+r} \tag{3.29}$$

において，

$$\operatorname{im} d_r^{p-r} = B_{r+1}^p/B_r^p \subset Z_{r+1}^p/B_r^p = \ker d_r^p \tag{3.30}$$

を得る．これはd_rが微分であることを意味する．また，

$$\ker d_r^p/\operatorname{im} d_r^{p-r} \cong Z_{r+1}^p/B_{r+1}^p = E_{r+1}^p \tag{3.31}$$

が成立する．

$$E_r = \sum_p E_r^p \tag{3.32}$$

とすると以下が得られた．

Theorem 3.2. $r \geq 1$なるrに対して，$d_r : E_r \to E_r$は次数rの微分である． d_rのホモロジーはE_{r+1}．

特に，$r = 1$に対しては，$B_1^p = \operatorname{im}[0 = H(p,p) \xrightarrow{\delta} H(p,p+1)] = 0$より，

$$E_1^p = Z_1^p = H(p,p+1). \tag{3.33}$$

よって，

$$d_1^p : H(p,p+1) \xrightarrow{\delta} H(p+1,p+2). \tag{3.34}$$

d_r^pの別の記述を考える． $r \geq 1$に対して以下は可換図式であり，行は完全．

$$\begin{tikzcd} & H(p,p+r) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ H(p-r+1,p) \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "\delta"] & H(p,p+1) \arrow[r] & H(p-r+1,p+1) \end{tikzcd} \tag{3.35}$$

よって補題 3.1より，

$$\operatorname{im}[H(p,p+r) \to H(p,p+1)]/\operatorname{im}[H(p-r+1,p) \xrightarrow{\delta} H(p,p+1)] \cong \operatorname{im}[H(p,p+r) \to H(p-r+1,p+1)] \tag{3.36}$$

つまり，

$$E_r^p = Z_r^p/B_r^p \cong \operatorname{im}[H(p,p+r) \to H(p-r+1,p+1)]. \tag{3.37}$$

$r \geq 1$に対する可換図式

$$\begin{tikzcd} H(p,p+r) \arrow[r, "\varphi_r^p"] \arrow[d, "\delta"] & H(p-r+1,p+1) \arrow[d, "\delta"] \\ H(p+r,p+2r) \arrow[r, "\varphi_r^{p+r}"] & H(p+1,p+r+1) \end{tikzcd} \tag{3.38}$$

より，準同型

$$\tilde{d}_r^p : E_r^p = \operatorname{im}\varphi_r^p \to \operatorname{im}\varphi_r^{p+r} = E_r^{p+r}, \tag{3.39}$$

$$\operatorname{im}\varphi_r^p \ni y = \varphi_r^p(x) \xrightarrow{\delta} \delta\varphi_r^p(x) = \varphi_r^{p+r}\delta(x) \in \operatorname{im}\varphi_r^{p+r}, \tag{3.40}$$

が定義される．特に，$r = 1$は

$$\tilde{d}_1^p : H(p,p+1) \xrightarrow{\delta} H(p+1,p+2). \tag{3.41}$$

$\tilde{d}_r^p$が以前に定義したd_r^pと一致することは，保留.

3.1 例：一般ホモロジー理論

以下のように取る.

$$F_p h_n = \operatorname{im}[h_n(X_p) \to h_n(X)], \tag{3.42}$$

$$Z_{p,q}^r = \operatorname{im}[h_{p+q}(X_p, X_{p-r}) \to h_{p+q}(X_p, X_{p-1})], \tag{3.43}$$

$$B_{p,q}^r = \operatorname{im}[h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \xrightarrow{\delta} h_{p+q}(X_p, X_{p-1})], \tag{3.44}$$

$$E_{p,q}^r = Z_{p,q}^r / B_{p,q}^r. \tag{3.45}$$

- $Z_{p,-p}^r$の意味は，「$(p-r)$骨格X_{p-r}上のアノマリーを許容するp骨格X_p上の可逆相をpセル上に制限して得られる分類.」
- $B_{p,-p}^r$の意味は，「pセル上の可逆相の中で，$(p+r-1)$骨格X_{p+r-1}上の断熱ポンプによって得られるもの.」

という意味がそれぞれある.

$r = 1$は，

$$E_{p,q}^1 = h_{p+q}(X_p, X_{p-1}), \tag{3.46}$$

$$d_{p,q}^1 : h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \to h_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2}). \tag{3.47}$$

$r > 1$に対する微分$d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \to E_{p-r,q+r-1}^r$は，以下の図式で定義されると理解できる.

$$d_{p,q}^r : \operatorname{im}\varphi_{p,q}^r \to \operatorname{im}\varphi_{p-r,q-1}^r \tag{3.48}$$

$$\begin{tikzcd} h_{p+q}(X_p, X_{p-r}) \arrow[r, "\varphi_{p,q}^r"] \arrow[d, "\partial"] & h_{p+q}(X_{p+r-1}, X_{p-1}) \arrow[d, "\partial"] \\ h_{p+q-1}(X_{p-r}) \arrow[d] & h_{p+q-1}(X_{p-1}) \arrow[d] \\ h_{p+q-1}(X_{p-r}, X_{p-2r}) \arrow[r, "\varphi_{p-r,q-1}^r"] & h_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-r-1}) \end{tikzcd} \tag{3.49}$$

つまり，大雑把には境界作用素

$$\partial : h_{p+q}(X_p, X_{p-r}) \to h_{p+q-1}(X_{p-r}) \tag{3.50}$$

と思ってよい．

References

[1] Cartan, Henri, and Samuel Eilenberg, *Homological algebra*, Vol. 28. Princeton university press, 1999.