Stiefel=Whitney類の局所公式について

塩崎　謙

April 1, 2025

Abstract

McLaughlin[1]のメモ．

1　準備

$P \to M$を主$SO(n)$束とする． $\{U_i\}_i$をMのgood coveringとする．変換関数を

$$g_{ij}(x) \in SO(n), \quad x \in U_{ij}, \tag{1.1}$$

とする．コサイクル条件は

$$g_{ij}(x)g_{jk}(x) = g_{ik}(x), \quad x \in U_{ijk}. \tag{1.2}$$

$SO(n)$からStiefel多様体$SO(n)/SO(k-1)$への射影を

$$g \mapsto \bar{g} \tag{1.3}$$

と書く．左作用

$$g \cdot \bar{h} = \overline{gh} \tag{1.4}$$

が自然に定まる． k次のSW類は

$$w_k(P) \in H^k(M, \mathbb{Z}_2) \tag{1.5}$$

に値を取る． $w_k(P)$を与えるCechコサイクルを変換関数のデータから構成する [1].

$$H_p(SO(n)/SO(k-1), \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} 0 & p = 1, \dots, k-2, \\ \mathbb{Z}_2 & p = k-1, \end{cases} \tag{1.6}$$

に注意する．

2　構成

$x \in U_{ij}$に対して，パス

$$\tau^1_{ij}(x) : \Delta^1 = [0,1] \to SO(n)/SO(k-1) \tag{2.1}$$

を

$$\tau^1_{ij}(x)|_{t=0} = \bar{e}, \quad \tau^1_{ij}(x)|_{t=1} = \bar{g}_{ij}(x), \tag{2.2}$$

なるように定める．マップ

$$\tau^1_{ij} : \Delta^1 \times U_{ij} \to SO(n)/SO(k-1) \tag{2.3}$$

は連続になるように取ることができると仮定する．終点と始点が一致する 2 つのパスの接続を

$$\gamma_0 * \gamma_1, \quad (\gamma_0|_{t=1} = \gamma_1|_{t=0}), \tag{2.4}$$

と書く．（左から右に進む．）パス

$$V^1_{ijk}(x) := \tau^1_{ij}(x) * (g_{ij}(x) \cdot \tau^1_{jk}(x)) * (\tau^1_{ik}(x))^{-1}, \quad x \in U_{ijk}, \tag{2.5}$$

はコサイクル条件より閉経路である．実際，左から

$$\bar{e} \to \bar{g}_{ij}(x) \to \overline{g_{ij}(x)g_{jk}(x)} = \bar{g}_{ik}(x) \to \bar{e}. \tag{2.6}$$

2.1 $w_2(P)$

$k = 2$のとき，

$$H_1(SO(n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \tag{2.7}$$

より，$V^1_{ijk}(x)$は非自明なサイクルか，あるいは自明なサイクルである．非自明/自明は$x \in U_{ijk}$の選び方に依存しないので，Cechコサイクル

$$z^2_{ijk} := \begin{cases} 0 & (V^1_{ijk}\text{が自明なサイクル}), \\ 1 & (V^1_{ijk}\text{が非自明なサイクル}), \end{cases} \tag{2.8}$$

が定まる．$w_2(P) = [z^2_{ijk}]$とする．

$H_1(SO(n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$であるので，パス$\tau^1_{ij}(x \in U_{ij}) : e \rightsquigarrow g_{ij}(x) \in SO(n)$の取り方に$\mathbb{Z}_2$の任意性があり，これがリフト$SO(n) \to \mathrm{Spin}(n)$の取り方に対応する．

2.2 $w_3(P)$

$k = 3$のときは，$V^1_{ijk}(x)$は自明なサイクルであるので，$V^1_{ijk}(x)$を境界とするような特異 2 単体$\tau^2_{ijk}(x)$が存在する．

$$^\exists\tau^2_{ijk}(x), \quad \text{s.t.} \quad \partial\tau^2_{ijk}(x) = V^1_{ijk}(x). \tag{2.9}$$

マップ

$$\tau^2_{ijk} : \Delta^2 \times U_{ijk} \to SO(n)/SO(2) \tag{2.10}$$

は連続になるように取ることができると仮定する．すると，特異 2 単体の線形和

$$V^2_{ijkl}(x) = g_{ij}(x) \cdot \tau^2_{jkl}(x) + \tau^2_{ikl}(x) + \tau^2_{ijl}(x) + \tau^2_{ijk}(x), \quad x \in U_{ijkl}, \tag{2.11}$$

は 2 サイクルを定める． $H_2(SO(n)/SO(2), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$より，Cech 3 コサイクル

$$z^3_{ijkl} := \begin{cases} 0 & (V^2_{ijkl}\text{が自明なサイクル}), \\ 1 & (V^2_{ijkl}\text{が非自明なサイクル}), \end{cases} \tag{2.12}$$

が定まる．$w_3(P) = [z^3_{ijkl}]$とする．

$k > 3$，つまり，$w_4, w_4, \ldots,$も同様にして構成される．

References

[1] D. A. McLaughlin, *Local formulae for Stiefel-Whitney classes*, Manuscripta Math 89, 1–13 (1996).