K群の次数と対称性群，乗数系について

塩崎　謙

April 24, 2021

K群の次数と対称性についてまとめる．AHSSのE_1ページは

$$E_1^{p,-n} = K^{p-n}(X_p, X_{p-1}) = \prod K^{p-n}(D^p, \partial D^p) = \prod K^{-n}(pt) \tag{1}$$

だった．次数$-n$の対称性が知りたい．次数0の対称性を

$$\hat{g} H \hat{g}^{-1} = (-1)^{c_g} H, \quad \hat{g}\hat{h} = z_{g,h}\widehat{gh}, \quad \hat{g} = u_g K^{\phi_g}, \quad g \in G \tag{2}$$

とする．次数$-n$のシフトは，以下のカイラル対称性を加えることと等価.

$$\gamma_i H \gamma_i^{-1} = -H, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \hat{g}\gamma_i = (-1)^{c_g}\gamma_i \hat{g}. \tag{3}$$

まずは$n=1$のときの変化を見る．カイラル対称性γが加わることにより，群元が２倍となる．群元そのものも$\{\gamma g\}_{g \in G}$と書こう．

$$G^{(n=1)} = G + \gamma G. \tag{4}$$

ここで，次数$-n$における群を$G^{(n)}$と書いた．$G^{(0)} = G$である．また，次数$-n$において，群元$g \in G^{(n)}$のユニタリ/反ユニタリ性を$\phi_g^{(n)} \in \{0,1\}$ で指定し，ハミルトニアンとの可換/非可換性を$c_g \in \{0,1\}$で指定する．明らかに，

$$\phi_{\gamma g}^{(1)} = 1, \quad c_{\gamma g}^{(1)} = 1 - c_g, \quad g \in G \tag{5}$$

である．対称性演算子を

$$\widehat{\gamma g} := \gamma \hat{g} \tag{6}$$

と定義すると，$G + \gamma G$の乗数系は

$$\begin{aligned}
&\hat{g}\hat{h} = z_{g,h}\widehat{gh}, && (7)\\
&\hat{g}\widehat{\gamma h} = \hat{g}\gamma\hat{h} = (-1)^{c_g} z_{g,h}\widehat{\gamma gh}, && (8)\\
&\widehat{\gamma g}\hat{h} = \gamma\hat{g}\hat{h} = z_{g,h}\widehat{\gamma gh}, && (9)\\
&\widehat{\gamma g}\widehat{\gamma h} = \gamma\hat{g}\gamma\hat{h} = (-1)^{c_g} z_{g,h}\widehat{gh}. && (10)
\end{aligned}$$

これをみると，

$$\epsilon_g := \begin{cases} 0 & (g \in G) \\ 1 & (g \in \gamma G) \end{cases} \tag{11}$$

を定義すると，群$G^{(1)}$の乗数系$z_{g,h}^{(1)}$は

$$z_{g,h}^{(1)} = (-1)^{c_g \epsilon_h} z_{g,h}, \quad g, h \in G + \gamma G \tag{12}$$

とまとめて書くことができる．

次に$n=2$の場合を考える． $\gamma_1=\sigma_x,\gamma_2=\sigma_z,H=\sigma_y\otimes H',\hat{g}=\sigma_y^{c_g}\otimes\hat{g}'$とおくと，$\gamma_1,\gamma_2$を消去できる．このとき，$\hat{g}'$が従う乗数系は以下のように変化する．

$$\hat{g}\hat{h}=\sigma_y^{c_g}\otimes\hat{g}'\sigma_y^{c_h}\otimes\hat{h}'=(-1)^{\phi_g c_h}\sigma_y^{c_{gh}}\otimes\hat{g}'\hat{h}' \tag{13}$$

より，

$$z_{g,h}^{(2)}=(-1)^{\phi_g c_h}z_{g,h}. \tag{14}$$

また，c_gも変化する．

$$\hat{g}H=\sigma_y^{c_g}\otimes\hat{g}'\sigma_y\otimes H'=(-1)^{\phi_g}\sigma_y^{1-c_g}\hat{g}'H', \tag{15}$$

$$H\hat{g}=\sigma_y\otimes H'\sigma_y^{c_g}\otimes\hat{g}'=\sigma_y^{1-c_g}\otimes H'\hat{g}' \tag{16}$$

より，

$$\hat{g}'H'\hat{g}'^{-1}=(-1)^{\phi_g+c_g}H'. \tag{17}$$

つまり

$$c_g^{(2)}=\phi_g+c_g \mod 2. \tag{18}$$

$n\geq 3$については上記を繰り返す．まとめると以下を得る．

	$G^{(n)}$	$\phi_g^{(n)}$	$c_g^{(n)}$	$z_{g,h}^{(n)}$	γ
$n=0$	G	ϕ_g	c_g	$z_{g,h}$	
$n=1$	$G+\gamma G$	ϕ_g	$c_g+\epsilon_g$	$(-1)^{c_g\epsilon_h}z_{g,h}$	$\hat{g}\gamma=(-1)^{c_g}\gamma\hat{g},\quad g\in G$
$n=2$	G	ϕ_g	$c_g+\phi_g$	$(-1)^{\phi_g c_h}z_{g,h}$	
$n=3$	$G+\gamma G$	ϕ_g	$c_g+\phi_g+\epsilon_g$	$(-1)^{(c_g+\phi_g)\epsilon_h+\phi_g c_h}z_{g,h}$	$\hat{g}\gamma=(-1)^{c_g+\phi_g}\gamma\hat{g},\quad g\in G$
$n=4$	G	ϕ_g	c_g	$(-1)^{\phi_g\phi_h}z_{g,h}$	
$n=5$	$G+\gamma G$	ϕ_g	$c_g+\epsilon_g$	$(-1)^{c_g\epsilon_h+\phi_g\phi_h}z_{g,h}$	$\hat{g}\gamma=(-1)^{c_g}\gamma\hat{g},\quad g\in G$
$n=6$	G	ϕ_g	$c_g+\phi_g$	$(-1)^{\phi_g(c_h+\phi_h)}z_{g,h}$	
$n=7$	$G+\gamma G$	ϕ_g	$c_g+\phi_g+\epsilon_g$	$(-1)^{(c_g+\phi_g)\epsilon_h+\phi_g(c_h+\phi_h)}z_{g,h}$	$\hat{g}\gamma=(-1)^{c_g+\phi_g}\gamma\hat{g},\quad g\in G$

いくつかのコメント．

- ユニタリかつハミルトニアンと可換な部分群を$G_0^{(n)}=\mathrm{Ker}\,\phi^{(n)}\cap\mathrm{Ker}\,c^{(n)}$とする．偶数次数については$G_0^{(n\in\text{even})}=G_0$でかつ乗数系は$z^{(n\in\text{even})}=z_{g,h},g,h\in G_0^{(n\in\text{even})}$．奇数次数については$G_0^{(n\in\text{odd})}=G_0+\gamma\Gamma G_0$でかつ乗数系は$z^{(n\in\text{odd})}=(-1)^{c_g\epsilon_h}z_{g,h},g,h\in G_0^{(n\in\text{even})}$．よって，既約表現の格子は，偶数と奇数の２種類について構成すれば良い．
- よって，$G_0^{(n)}$の既約表現は超伝導ギャップ関数の1次元表現に依存しない．
- 偶数$(-n)$次については，TRSとPHSの役割が入れ替わる．
- 奇数$-n$次の場合に，カイラル対称性γを新しい対称性として追加した計算は行いたくはないが，行わざるを得ない．[1]

奇数$-n$次の場合は，対応して，（半端な）並進も定義する．

$$t_g=\begin{cases} t_g & g\in G,\\ t_{\gamma^{-1}g} & g\in\gamma G.\end{cases} \tag{19}$$

常伝導，超伝導相のそれぞれについて群元を以下にまとめる．

[1]カイラル指数について http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~ken.shiozaki/doc/chiral_index.pdf

- 常伝導相

  $G = G_0 + TG_0$として,

$$G^{(n)} = \begin{cases} \{G_0, TG_0, 0, 0\} & (n = 0, 4), \\ \{G_0, TG_0, \gamma TG_0, \gamma G_0\} & (n = 1, 3), \\ \{G_0, 0, TG_0, 0\} & (n = 2, 6), \\ \{G_0, \gamma TG_0, TG_0, \gamma G_0\} & (n = 3, 7). \end{cases} \tag{20}$$

- 超伝導相

$$G^{(n)} = \begin{cases} \{G_0, TG_0, CG_0, \Gamma G_0\} & (n = 0, 4) \\ \{G_0 + \Gamma\gamma G_0, T(G_0 + \Gamma\gamma G_0), C(G_0 + \Gamma\gamma G_0), \Gamma(G_0 + \Gamma\gamma G_0)\} & (n = 1, 3) \\ \{G_0, CG_0, TG_0, \Gamma G_0\} & (n = 2, 6) \\ \{G_0 + \Gamma\gamma G_0, C(G_0 + \Gamma\gamma G_0), T(G_0 + \Gamma\gamma G_0), \Gamma(G_0 + \Gamma\gamma G_0)\} & (n = 3, 7) \end{cases} \tag{21}$$