標準的なThoulessポンプのChern数

Ken Shiozaki

June 2, 2020

自由度として，各サイト$x \in \mathbb{Z}$に複素フェルミオンa_x, b_xを考える．始状態を

$$\prod_{x \in \mathbb{Z}} a_x^\dagger |0\rangle \tag{1}$$

として，次の短距離相関状態のサイクルを考える．

$$\prod_{x \in \mathbb{Z}} a_x^\dagger |0\rangle \to \prod_{x \in \mathbb{Z}} \frac{a_x^\dagger + b_x^\dagger}{\sqrt{2}} |0\rangle \to \prod_{x \in \mathbb{Z}} b_x^\dagger |0\rangle \to \prod_{x \in \mathbb{Z}} \frac{b_x^\dagger + a_{x+1}^\dagger}{\sqrt{2}} |0\rangle \to \prod_{x \in \mathbb{Z}} a_x^\dagger |0\rangle . \tag{2}$$

図1を見よ． 対応するハミルトニアンは

$$H(\lambda \in [0,\pi]) = \sum_x (a_x^\dagger, b_x^\dagger)(-\cos\lambda\sigma_z - \sin\lambda\sigma_x) \begin{pmatrix} a_x \\ b_x \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$= \sum_k (a_k^\dagger, b_k^\dagger)(-\cos\lambda\sigma_z - \sin\lambda\sigma_x) \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$H(\lambda \in [\pi,2\pi]) = \sum_x (a_{x+1}^\dagger, b_x^\dagger)(-\cos\lambda\sigma_z - \sin\lambda\sigma_x) \begin{pmatrix} a_{x+1} \\ b_x \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$= \sum_k (a_k^\dagger, b_k^\dagger)(-\cos\lambda\sigma_z - \sin\lambda \begin{pmatrix} & e^{-ik} \\ e^{ik} & \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}. \tag{6}$$

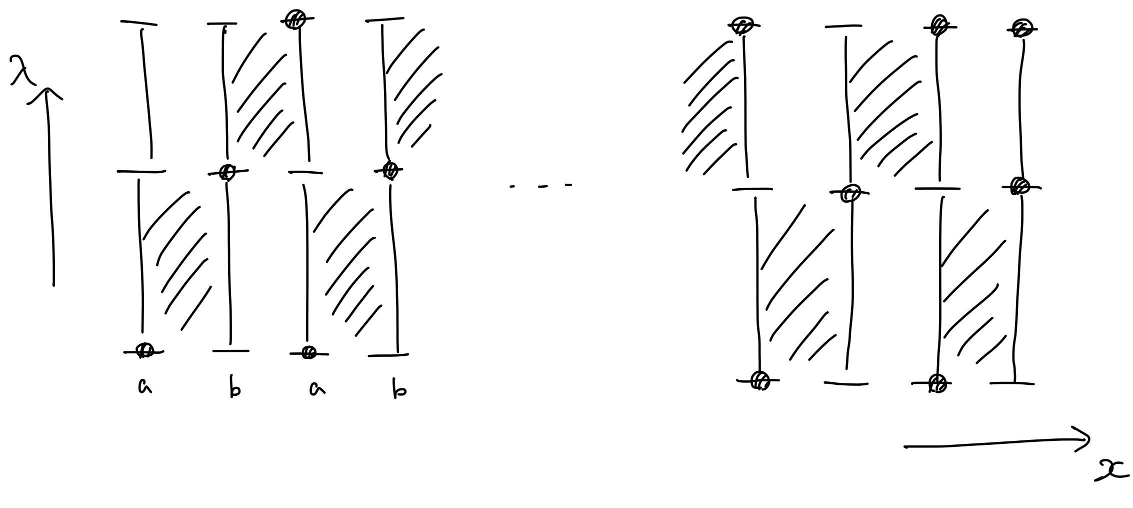

Figure 1: Thoulessポンプ．

となる．前者のハミルトニアンはk依存しないので，Berry曲率はゼロ．後者のハミルトニアンのBerry曲率を計算しよう．

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(k,\lambda) &= -\cos\lambda\sigma_z - \sin\lambda(\cos k\sigma_x + \sin k\sigma_y) && (7)\\
&= -\cos\lambda\sigma_z - \sin\lambda\sigma_x(\cos k + i\sigma_z \sin k) && (8)\\
&= -e^{-i\sigma_z k/2}(\cos\lambda\sigma_z + \sin\lambda\sigma_x)e^{i\sigma_z k/2} && (9)\\
&= -e^{-i\sigma_z k/2}\sigma_z(\cos\lambda + i\sigma_y \sin\lambda)e^{i\sigma_z k/2} && (10)\\
&= -e^{-i\sigma_z k/2}e^{-i\sigma_y\lambda/2}\sigma_z e^{i\sigma_y\lambda/2}e^{i\sigma_z k/2} && (11)
\end{aligned}$$

より，専有状態のベクトルは

$$u(k,\lambda) \sim e^{-i\sigma_z k/2}e^{-i\sigma_y\lambda/2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\cos\frac{\lambda}{2}\\ e^{ik}\sin\frac{\lambda}{2}\end{pmatrix} \tag{12}$$

で与えられる．このゲージにおけるBerry接続，及びBerry曲率は

$$\begin{aligned}
A(k,\lambda) &= u^\dagger du = i\sin^2\frac{\lambda}{2}dk, && (13)\\
F(k,\lambda) &= dA = \frac{i}{2}\sin\lambda d\lambda dk. && (14)
\end{aligned}$$

すると，1サイクル$\lambda \in [0,2\pi]$におけるChern数は

$$\frac{i}{2\pi}\int F = \frac{i}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}d\lambda\int_0^{2\pi}dk\frac{i}{2}\sin\lambda = 1 \tag{15}$$

となり，x方向正にポンプされる複素フェルミオン専有状態の数と一致する．

注意として，波数空間k，及びλにおけるハミルトニアン$\mathcal{H}(k,\lambda)$は$\lambda=\pi$において不連続に変化する．よって，λを波数とみなしFourier変換により実空間模型を構成すると，長距離の飛び移り項が含まれる．