トレースノルムの縮小性

塩崎　謙

August 4, 2024

[1]

Definition 0.1 (トレースノルム). $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$に対して,

$$||A||_{\mathrm{tr}} = \mathrm{tr}\,|A| \tag{1}$$

をトレースノルムと呼ぶ.

$\{\sigma_a\}_a$をAの特異値とすると,

$$||A||_{\mathrm{tr}} = \sum_{a=1}^{n} \sigma_a. \tag{2}$$

また，任意の$U, V \in U(n)$に対して,

$$||UAV^\dagger||_{\mathrm{tr}} = ||A||_{\mathrm{tr}} \tag{3}$$

に注意.

まず，以下の補題を示す.

Lemma 0.2. $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$に対して,

$$|\mathrm{tr}\,(AB)| \leq ||A||_{\mathrm{tr}}||B||. \tag{4}$$

等号成立は$A = U|A|$を極分解として，$B = U^\dagger$のとき.

（証明） $A = U|A|$と極分解する [2]. 線形写像

$$\phi_{|A|} : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \quad \phi_{|A|}(B) := \mathrm{tr}\,(|A|B) \times 1_n = \mathrm{tr}\,(\sqrt{|A|}B\sqrt{|A|}) \times 1_n \tag{5}$$

はpositiveであるから，Russo=Dyeより，任意の$B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$に対して,

$$|\mathrm{tr}\,(|A|B)| = ||\phi_{|A|}(B)|| \leq ||\phi_{|A|}|| \cdot ||B|| \leq ||\phi_{|A|}(1)|| \cdot ||B|| = \mathrm{tr}\,|A| \cdot ||B|| = ||A||_{\mathrm{tr}} \cdot ||B||. \tag{6}$$

よって,

$$|\mathrm{tr}\,(AB)| = |\mathrm{tr}\,(|A|BU)| \leq ||A||_{\mathrm{tr}} \cdot ||BU|| = ||A||_{\mathrm{tr}} \cdot ||B||. \tag{7}$$

等号成立は$BU = 1_n$のとき. □

[1] 以下の証明は法橋顕広氏に教えて頂きました．ありがとうございます.

[2] $A = U\Sigma V^\dagger$を特異値分解として，$A = (UV^\dagger)V\Sigma V^\dagger$が極分解.

これからトレースノルムの変分表示を得る：

Corollary 0.3.

$$||A||_{\mathrm{tr}} = \sup_{B, ||B||=1} |\mathrm{tr}\,(AB)|. \tag{8}$$

以下を示す.

Theorem 0.4 (トレースノルムの縮小性)**.** $T : \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$を*positive*な線形写像とする. $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$に対して,

$$||T(A)||_{\mathrm{tr}} \leq ||T^*(1)|| \cdot ||A||_{\mathrm{tr}}. \tag{9}$$

特に, Tがトレースを保存するとき,

$$||T(A)||_{\mathrm{tr}} \leq ||A||_{\mathrm{tr}}. \tag{10}$$

（証明）

$$||T(A)||_{\mathrm{tr}} = \sup_{B, ||B||=1} |\mathrm{tr}\,(T(A)B)| = \sup_{B, ||B||=1} |\mathrm{tr}\,(AT^*(B))| \tag{11}$$

ここで,

$$|\mathrm{tr}\,(AT^*(B))| \leq ||A||_{\mathrm{tr}} \cdot ||T^*(B)|| \leq ||A||_{\mathrm{tr}} \cdot ||T^*|| \cdot ||B|| = ||A||_{\mathrm{tr}} \cdot ||T^*(1)|| \cdot ||B|| \tag{12}$$

より,

$$||T(A)||_{\mathrm{tr}} \leq ||A||_{\mathrm{tr}} \cdot ||T^*(1)|| \tag{13}$$

を得る. □

1 Back up

[3]

$M_n = \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$と書く．線形写像$T: M_m \to M_n$に対して，双対$T^*$を以下で定義する．

$$\mathrm{tr}\,[YT(X)] = \mathrm{tr}\,[T^*(Y)X], \quad X \in M_m, Y \in M_n. \tag{14}$$

TがpositiveであればHilbert=Schmidt内積で定義された随伴作用素と一致する．

TがpositveであればT^*もpositive.

（証明） $X = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i| \geq 0$のとき，

$$\langle v|T^*(X)|v\rangle = \mathrm{tr}\,[T^*(X)|v\rangle\langle v|] = \mathrm{tr}\,[XT(|v\rangle\langle v|)] = \sum_i \lambda_i \langle i|T(|v\rangle\langle v|)i\rangle \tag{15}$$

であるが，$\lambda_i \geq 0$，$|v\rangle\langle v| \geq 0$より$T$はpositiveであるから$T(|v\rangle\langle v|) \geq 0$のため$\langle i|T(|v\rangle\langle v|)i\rangle \geq 0$より． □

線形写像$T: M_m \to M_n$がトレース保存であることと，T^*が単位的（unital）であることは同値.

- $\mathrm{tr}\,T(X) = \mathrm{tr}\,X$, $X \in M_d$.
- $T^*(1) = 1$.

（証明）トレース保存であれば任意の$X \in M_d$に対して

$$\mathrm{tr}\,[T^*(1)X] = \mathrm{tr}\,[T(X)] = \mathrm{tr}\,[X] \tag{16}$$

より$T^*(1) = 1$. 逆にT^*が単位的であれば

$$\mathrm{tr}\,[T(X)] = \mathrm{tr}\,[1T(X)] = \mathrm{tr}\,[T^*(1)X] = \mathrm{tr}\,[X] \tag{17}$$

より． □

エルミート行列Aに対して，

$$A = \sum_i \lambda_i E_i \tag{18}$$

とスペクトル分解したとき，

$$A_+ = \sum_{i,\lambda_i>0} \lambda_i E_i, \quad A_- = \sum_{i,\lambda_i<0} \lambda_i E_i, \quad P_{A>0} = \sum_{i,\lambda_i>0} E_i, \tag{19}$$

などと書く．

$$A = A_+ - A_-, \quad |A| = \sqrt{A^\dagger A} = A_+ + A_- \tag{20}$$

に注意．以下が成立する．

エルミート行列Aに対して，

$$\mathrm{tr}\,A_+ = \max_{0\leq S\leq 1} \mathrm{tr}\,AS. \tag{21}$$

等号成立は$S = P_{A>0}$.

[3]本ノートはhttp://www.quest.lab.uec.ac.jp/ogawa/qmath2020/qmath20200729.pdfを参考にした.

（証明）

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} AS &= \operatorname{tr} A_+S - \operatorname{tr} A_-S = \operatorname{tr}[A_+] - \operatorname{tr}[A_+(1-S)] - \operatorname{tr}[A_-S] \qquad (22)\\ &= \operatorname{tr}[A_+] - \operatorname{tr}[(1-S)^{1/2}A_+(1-S)^{1/2}] - \operatorname{tr}[S^{1/2}A_-S^{1/2}] \qquad (23)\end{aligned}$$

一般論として，$X \geq 0$であれば$Y^\dagger XY \geq 0$．なぜなら

$$\langle v|Y^\dagger XY|v\rangle = \langle Yv|X|Yv\rangle \geq 0, \quad v \in \mathbb{C}^d \qquad (24)$$

より．よって，

$$\operatorname{tr}[(1-S)^{1/2}A_+(1-S)^{1/2}] \geq 0, \quad \operatorname{tr}[S^{1/2}A_-S^{1/2}] \geq 0 \qquad (25)$$

まで． □

$T : M_m(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$を trace-preserving positive linear mapとする．エルミート行列$A \in M_n$に対して，

$$\operatorname{tr} A_+ \geq \operatorname{tr} T(A)_+, \quad \operatorname{tr} A_- \geq \operatorname{tr} T(A)_-. \qquad (26)$$

（証明）

$$\operatorname{tr} T(A)_+ = \operatorname{tr}[T(A)P_{T(A)>0}] = \operatorname{tr}[AT^*(P_{T(A)>0})]. \qquad (27)$$

ここで，$P_{T(A)>0} \leq 1$かつT^*はpositiveであるから，

$$T^*(1 - P_{T(A)>0}) \geq 0, \qquad (28)$$

よってT^*は単位的であるから，

$$1 = T^*(1) \geq T^*(P_{T(A)>0}) \geq 0. \qquad (29)$$

よって(21)より

$$\operatorname{tr}[AT^*(P_{T(A)>0})] \leq \max_{0\leq S\leq 1} \operatorname{tr}[AS] = \operatorname{tr} A_+. \qquad (30)$$

$\operatorname{tr} A_-$も同様． □

以下が示したかったこと．

Lemma 1.1 (トレースノルムの単調性). $T : M_m(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$を *trace-preserving positive linear map*とする．

$$\operatorname{tr}|A| \geq \operatorname{tr}|T(A)|, \quad A \in M_n(\mathbb{C}), \quad A^\dagger = A. \qquad (31)$$

（証明）

$$\operatorname{tr}|A| = \operatorname{tr}(A_+ + A_-) = \operatorname{tr}(A_+) + \operatorname{tr}(A_-) \geq \operatorname{tr} T(A)_+ + \operatorname{tr} T(A)_- = \operatorname{tr}|T(A)|. \quad \square \qquad (32)$$

一般の$A \in M_d(\mathbb{C})$についても成立するらしいが，証明できなかった．