WZ項のGawędzki=Reis構成

塩崎　謙

February 5, 2024

Abstract

[1]のWZ作用の局所構成についてのメモ.

1　巻き付き数から準備

準備として，３次元巻き付き数に関わるいくつかの関係式を示す.

$$g : M_3 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \tag{1}$$

に対して，巻き付き数は

$$W_3[g] = \frac{1}{24\pi^2} \int_{M_3} \mathrm{tr}\,[g^{-1}dg]^3 \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

で与えられる.

$$H(g) = \frac{1}{12\pi} \mathrm{tr}\,[g^{-1}dg]^3 \tag{3}$$

とする．以下が成立する.

$$\boxed{H(uv^{-1}) = H(u) - H(v) + \frac{1}{4\pi} d\mathrm{tr}\,[u^{-1}duv^{-1}dv].} \tag{4}$$

証明は，

$$\begin{aligned} g^{-1}dg &= (uv^{-1})^{-1}(duv^{-1} + udv^{-1}) = vu^{-1}duv^{-1} + vdv^{-1} = v(u^{-1}du + dv^{-1}v)v^{-1} & (5) \\ &= v(u^{-1}du - v^{-1}dv)v^{-1} =: v(X - Y)v^{-1} & (6) \end{aligned}$$

とする.

$$X^2 = -dX, \quad Y^2 = -dY \tag{7}$$

に注意.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,[g^{-1}dg]^3 &= \mathrm{tr}\,[X - Y]^3 = \mathrm{tr}\,[X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3] = \mathrm{tr}\,[X^3] - \mathrm{tr}\,[Y^3] - 3\mathrm{tr}\,[X^2Y - XY^2] & (8) \\ &= \mathrm{tr}\,[X^3] - \mathrm{tr}\,[Y^3] + 3\mathrm{tr}\,[dXY - XdY] = \mathrm{tr}\,[X^3] - \mathrm{tr}\,[Y^3] + 3d\mathrm{tr}\,[XY] & (9) \end{aligned}$$

より.　□

　これから，$vdv^{-1} = -dvv^{-1}$に注意して，

$$H(uv) = H(u) + H(u) - \frac{1}{4\pi} d\mathrm{tr}\,[u^{-1}dudvv^{-1}] \tag{10}$$

が成立する．これを用いると，

$$
\begin{aligned}
H(hgh^{-1}) &= H(hg) - H(h) + \frac{1}{4\pi}\mathrm{dtr}\,[(hg)^{-1}d(hg)h^{-1}dh] && (11)\\
&= H(g) - \frac{1}{4\pi}\mathrm{dtr}\,[h^{-1}dhdgg^{-1}] + \frac{1}{4\pi}\mathrm{dtr}\,[(hg)^{-1}d(hg)h^{-1}dh] && (12)\\
&= H(g) + \frac{1}{4\pi}\mathrm{dtr}\,[-h^{-1}dhdgg^{-1} + g^{-1}h^{-1}(dhg + hdg)h^{-1}dh] && (13)\\
&= H(g) + \frac{1}{4\pi}\mathrm{dtr}\,[h^{-1}dhgh^{-1}dhg^{-1} + (g^{-1}dg + dgg^{-1})h^{-1}dh] && (14)
\end{aligned}
$$

が成立する．

$$
\boxed{H(hgh^{-1}) = H(g) + \frac{1}{4\pi}\mathrm{dtr}\,[h^{-1}dhgh^{-1}dhg^{-1} + (g^{-1}dg + dgg^{-1})h^{-1}dh]. \qquad (15)}
$$

2 Gawędzki=Reis構成（$SU(n)$の場合）

本節では，target space は$SU(n)$とする．

$$
g : M_3 \to SU(n). \tag{16}
$$

理由のひとつは，以下ではgの元の対角化を仮定するためであり，$GL_n(\mathbb{C})$の元は例外線が存在するため．また，$U(n)$への拡張は可能と思われるが，まずは[1]に沿って，$SU(n)$の場合についてメモする．（$U(n)$の場合は[2]で議論されている．）

$H(g)$は閉形式であるので，局所的には$H = dB$なる 2 形式Bが存在し，以下のように明示的に与えることができる．

準備として，n個の$n \times n$対角行列を

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &:= \mathrm{diag}(0, \ldots, 0), && (17)\\
\lambda_i &:= \mathrm{diag}(\underbrace{\frac{n-i}{n}, \ldots, \frac{n-i}{n}}_{i\ \mathrm{times}}, \underbrace{\frac{-i}{n}, \ldots, \frac{-i}{n}}_{(n-i)\ \mathrm{times}}), \quad i = 1, \ldots, n-1, && (18)
\end{aligned}
$$

とする．また，

$$
\lambda_{ij} := \lambda_j - \lambda_i \tag{19}
$$

とする． $SU(n)$の被覆として，$\{O_i\}_{i=0,\ldots,n}$を

$$
O_i := \{g = \gamma e^{2\pi i\tau}\gamma^{-1} | \gamma \in SU(n), \tau = \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j\lambda_j \text{ with } 0 \le \tau_j, \sum_{j=0}^{n-1}\tau_j = 1, \tau_i > 0\} \tag{20}
$$

と定義する．この定義式より，O_iは可縮． τの対角成分をτ_{ii}と書くと， $g = \gamma e^{2\pi i\tau}\gamma^{-1}$は$g$の固有値が$\{e^{2\pi i\tau_{11}}, \ldots, e^{2\pi i\tau_{nn}}\}$であることを意味する．

$$
\tau_{11} - \tau_{22} = \tau_1, \quad \tau_{22} - \tau_{33} = \tau_2, \quad \ldots \quad , \tau_{n-1n-1} - \tau_{nn} = \tau_{n-1}, \quad \tau_{nn} - \tau_{11} = \tau_0 - 1, \tag{21}
$$

であるので， $g \in SU(n)$の固有値を

$$
\{e^{2\pi i\sigma_1}, \ldots, e^{2\pi i\sigma_n}\}, \quad \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_n \ge \sigma_1 - 1, \quad \sum_{i=1}^{n}\sigma_i = 0, \tag{22}
$$

と書くと，

$$
\begin{aligned}
O_i &= \{g \in SU(n) | \sigma_1 \ge \cdots \ge \sigma_i > \sigma_{i+1} \ge \cdots \ge \sigma_n \ge \sigma_1 - 1\}, \quad i = 1, \ldots, n-1, && (23)\\
O_0 &= \{g \in SU(n) | \sigma_1 \ge \cdots \ge \sigma_i \ge \sigma_{i+1} \ge \cdots \ge \sigma_n > \sigma_1 - 1\}, && (24)
\end{aligned}
$$

である．つまり，i番目と$i+1$番目の固有値の間に有限のギャップがある，というのがO_iの定義．いずれかの固有値σ_i, σ_{i+1}の間にギャップが存在する場合は，O_iに属する．全ての固有値が縮退している場合，例えば，$e^{2\pi i/n}1_n \in SU(n)$の場合でも，$O_0$に属する．よって

$$SU(n) = \cup_{i=0}^{n-1} O_i \tag{25}$$

が成立する．例えば，$SU(2)$の場合は，

$$O_0 = \{g \in SU(2) | g \neq -1_2\}, \quad O_1 = \{g \in SU(2) | g \neq 1_2\}. \tag{26}$$

$SU(3)$の場合を考える．３つの固有値$e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}$は$e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} = 1$の関係にある．全ての固有値が互いに異なる場合，$O_0, O_1, O_2$のいずれのカバーに入る．３つのうち２つ$e^{i\theta}, e^{i\theta}$が等しい場合は，$O_0, O_1, O_2$の少なくともひとつのカバーに入らない．具体的には，

$$O_1 = \{g \in SU(3) | g \not\sim \mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{i\theta}, e^{2i\theta}), 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}\}, \tag{27}$$

$$O_0 = \{g \in SU(3) | g \not\sim \mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{i\theta}, e^{2i\theta}), \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}\}, \tag{28}$$

$$O_2 = \{g \in SU(3) | g \not\sim \mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{i\theta}, e^{2i\theta}), \frac{4\pi}{3} < \theta < 2\pi\}, \tag{29}$$

を得る．例えば，全ての固有値が1近傍に存在する場合は，O_0に含まれる．

- γは$SU(n)$上で大域的に定義されるか？つまり，カノニカルなγを仮定して良い？大域的なγが存在するのであれば，τの選び方の問題のみをゲージ自由度とできる．
- 例として$SU(2)$の場合を考えると，$SU(2)$の元を$g = e^{i\alpha \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$と書くと，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\gamma(\boldsymbol{n}) = \gamma(\boldsymbol{n})\sigma_z$として，$g = \gamma(\boldsymbol{n}) e^{i\alpha\sigma_z/2}\gamma(\boldsymbol{n})^\dagger$となる．$\gamma(\boldsymbol{n})$は$\boldsymbol{n} \in S^2$で大域的に取ることはできない（？）ため，$SU(2)$全体で$\gamma$を大域的に定義することはできない．
- そうだとすると，τに加えて，γもパッチO_iに依存する．すると，パッチの共通部分O_{ij}においてγのゲージ変換が必要となるため，$B_{ij} = i\mathrm{tr}\,[\lambda_{ij}\gamma^{-1}d\gamma]$を使う正当化について検討必要．
- $U(n)$の場合は$\sum_i \sigma_i = 0$と取ることができないため，拡張が必要．（そもそも$SU(n)$の場合は１次元巻き付き数が存在しないため，３次元への拡張を考える方法でWZ項が定義できる．）

$g = \gamma\Lambda\gamma^{-1}$を$g$の対角化とする．$\Lambda$は対角行列．(15)より，

$$H(\gamma\Lambda\gamma^{-1}) = d\left[\frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\,[\gamma^{-1}d\gamma\Lambda\gamma^{-1}d\gamma\Lambda^{-1} + (\Lambda^{-1}d\Lambda + d\Lambda\Lambda^{-1})\gamma^{-1}d\gamma]\right] \tag{30}$$

$$= d\left[\frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\,[\gamma^{-1}d\gamma\Lambda\gamma^{-1}d\gamma\Lambda^{-1} + 2d\log\Lambda\gamma^{-1}d\gamma]\right]. \tag{31}$$

ここで，第２項に対して部分積分を実行すると，

$$\mathrm{tr}\,[d\log\Lambda\gamma^{-1}d\gamma] \to -\mathrm{tr}\,[\log\Lambda d(\gamma^{-1}d\gamma)] = \mathrm{tr}\,[\log\Lambda(\gamma^{-1}d\gamma)^2] \tag{32}$$

であるが，logの分枝を指定することによりwell-definedに．分枝の指定がカバーO_iに対応する．O_i上におけるlogの分枝を$\log_i$と書くと，

$$\log_i e^{2\pi i\tau} = 2\pi i(\tau - \lambda_i) \tag{33}$$

である．O_i上で，完全形式は，

$$H = dB_i, \tag{34}$$

$$B_i = Q + R_i, \tag{35}$$

$$Q = \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\,[\gamma^{-1}d\gamma\Lambda\gamma^{-1}d\gamma\Lambda^{-1}], \tag{36}$$

$$R_i = i\mathrm{tr}\,[(\tau - \lambda_i)(\gamma^{-1}d\gamma)^2], \tag{37}$$

で与えられる．

上でコメントしたように，γは大域的に取れない場合もあり，“ゲージ変換”

$$\gamma \mapsto \gamma W, \quad W\Lambda W^{-1} = \Lambda \tag{38}$$

なる不定性がある．以下を示す．

$$\Lambda = \bigoplus_I e^{i\theta_I} 1_{|I|}, \quad \sum_I |I| = n, \tag{39}$$

とする．$|I|$は縮退度． $g \in SU(n)$を対角化する基底を

$$g u_I = u_I e^{i\theta_I}, \quad u_I = (u_{I,1}, \ldots, u_{I,|I|}), \tag{40}$$

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \bigoplus_I \theta_I 1_{|I|}, \quad |\theta_I| < \pi, \tag{41}$$

とする．ゲージ変換は

$$u_I \mapsto u_I W_I, \quad W_I \in U(|I|). \tag{42}$$

このとき，

$$B_0 = \frac{1}{4\pi} \mathrm{tr}\,[\gamma^{-1} d\gamma \Lambda \gamma^{-1} d\gamma \Lambda^{-1}] + i\mathrm{tr}\,[\tau \gamma^{-1} d\gamma \gamma^{-1} d\gamma] \tag{43}$$

はゲージ不変．

（証明）

$$A_{IJ} = u_I^\dagger d u_J \tag{44}$$

と書く．ゲージ変換は

$$A_{IJ} \mapsto W_I^\dagger A_{IJ} W_J + \delta_{IJ} W_I^\dagger d W_I \tag{45}$$

である．

$$B_0 = \sum_{I,J} \left[\frac{1}{4\pi} \mathrm{tr}_I [A_{IJ} e^{i\theta_J} A_{JI} e^{-i\theta_I}] + \frac{i}{2\pi} \theta_I \mathrm{tr}_I [A_{IJ} A_{JI}] \right] \tag{46}$$

$$= \sum_{I,J;I\neq J} \left[\frac{1}{4\pi} \mathrm{tr}_I [A_{IJ} e^{i\theta_J} A_{JI} e^{-i\theta_I}] + \frac{i}{2\pi} \theta_I \mathrm{tr}_I [A_{IJ} A_{JI}] \right] \tag{47}$$

と書く．ただし，tr_Iは$1, \ldots, |I|$の足を走る． $I = J$の寄与は$\mathrm{tr}_I [A_{II} A_{II}] = 0$より消えた．ここで，$I \neq J$のとき，$\mathrm{tr}\,[A_{IJ} A_{JI}]$はゲージ不変であるので主張は示された． □

B_iも同様．よって，B_iはγのゲージに依存しない．

少し書き換えると，

$$\mathrm{tr}_I [A_{IJ} A_{JI}] = \mathrm{tr}_I u_I^\dagger d u_J u_J^\dagger d u_I = -\mathrm{tr}_I d u_I^\dagger u_J u_J^\dagger d u_I \tag{48}$$

であるので，以下のように書いても良い．

$$B_0 = -\frac{1}{4\pi} \sum_I e^{-i\theta_I} \mathrm{tr}_I \left[d u_I^\dagger \sum_{J, J\neq I} e^{i\theta_J} P_J d u_I \right] - i \sum_I \frac{\theta_I}{2\pi} \mathrm{tr}_I \left[d u_I^\dagger \sum_{J, J \neq I} P_J d u_I \right]. \tag{49}$$

Berry曲率

$$F_I = d u_I^\dagger (1 - P_I) d u_I \tag{50}$$

を導入すると第2項は

$$B_0 = -\frac{1}{4\pi}\sum_I e^{-i\theta_I}\mathrm{tr}_I\left[du_I^\dagger \sum_{J,J\neq I} e^{i\theta_J}P_J du_I\right] - i\sum_I \frac{\theta_I}{2\pi}\mathrm{tr}_I F_I \tag{51}$$

と書くこともできる．

以上の準備のもとWZ項の局所表示の導出する．

$$g : M_2 \to SU(n) \tag{52}$$

に対して，bounding manifold $X, \partial X = M_2$をひとつとり，拡張$\tilde{g} : X \to SU(n)$をひとつ取る． WZ項は以下で定義される．

$$WZ[g] := \frac{1}{12\pi}\int_X \mathrm{tr}\,[\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}]^3 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \tag{53}$$

XのO_iの意味での被覆を定め，雑だが同様に$\{O_i\}_i$と書く．すると，（雑な表記だが），

$$WZ[g] = \sum_i \int_{O_i} dB_i = \sum_i \int_{M_2\cap O_i} B_i + \sum_{i<j}\int_{O_i\cap O_j}(B_i - B_j) \tag{54}$$

ここで，

$$B_i - B_j = i\mathrm{tr}\,[(\lambda_j - \lambda_i)(\gamma^{-1}d\gamma)^2] = d\alpha_{i,j}, \tag{55}$$

$$\alpha_{i,j} = i\mathrm{tr}\,[(\lambda_i - \lambda_j)\gamma^{-1}d\gamma]. \tag{56}$$

と，完全形式であるので，全ての積分がM_2上で書くことができ，

$$WZ[g] = \sum_i \int_{M_2\cap O_i} B_i + \sum_{i<j}\int_{M_2\cap O_i\cap O_j}\alpha_{i,j} \tag{57}$$

を得る．

References

[1] Krzysztof Gawędzki, Nuno Reis, “WZW branes and gerbes”, arXiv:hep-th/0205233.

[2] Krzysztof Gawędzki, “Bundle gerbes for topological insulators”, arXiv:1512.01028.