ノート：Wallの構造定理について

塩崎　謙

December 1, 2021

Abstract

Wallの構造定理（Theorem 1 in [1]）の証明を追う．

1　準備

代数Aに対して部分空間Iが左（右）イデアルとは，任意の$a \in A$に対して$aI \subset I$ ($Ia \subset I$）なるとき．左イデアルかつ右イデアルである場合は両側イデアルと呼ぶ．代数Aが単純とは，Aが非自明な（つまり，Aでも0でもない）イデアルを持たないとき． Aを単純代数とする．

(Aii) Aの中心$Z(A) = \{z \in A | za = az \text{ for all } a \in A\}$は体．

（*proof.*）逆元の存在を示す． $z \in Z(A)$のとき，zAはAの両側イデアルである．一方でAは単純であるので，$zA = A$である．特に，$za = 1$なる$a \in A$が存在する．

代数Aが中心的とは中心$Z(A)$が1のk数倍$Z(A) = k$であるとき． Aを中心的単純代数とする．

(Bv) Aの単純部分代数Bに対して，その中心化群$C = \{a \in A | ab = ba \text{ for all } b \in B\}$は単純．また，$C$の中心化群は$B$であり，$A \cong B \otimes_k C$.

2　次数付き代数の諸性質

Aを体k上の代数とする． Aが次数付きとは，$A = A_0 \oplus A_1$（直和）であって，$A_i A_j \subset A_{i+j}$を満たすとき． [1] $a_i \in A_i$に対して$a_i = 1 \cdot a_i = a_i \cdot 1$であるから，$A_i \subset A_0 A_i, A_i \subset A_i A_0$も成立．つまり，$A_0 A_i = A_i A_0 = A_i$に注意．等号不成立の可能性は$A_1^2 \neq A_0$に限る． Aの部分空間Bが次数付きであるとは，Bが$B \cap A_i$の直和であるとき． [2]

IがA_0のイデアルであるとき，$A_0 I \subset I, IA_0 \subset I$．一方で，$1 \in A_0$であるから$I \subset A_0 I, I \subset IA_0$も成立．よって，$A_0 I = IA_0 = I$注意する．

- 中心$Z(A)$はAの次数付き部分空間である．

[1] 直和の定義を思い出すと，$A = A_0 \cup A_1$であって，$A_0 \cap A_1 = \emptyset$であるとき．つまり，２つのベクトル空間への分解が一意であるとき．

[2] Bは次数付き代数Aの部分空間であるので，分解の一意性は$A = A_0 \oplus A_1$から従う．「$B \cap A_i$の直和である」が意味のある条件．次数付きベクトル空間における例を考える． $V = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$とする． Vの部分ベクトル空間であって次数付き部分ベクトル空間ではない例は，$W = \mathbb{C}(1,1)$．実際，$W \cap \mathbb{C}(1,0) = \mathbb{C}(1,0), W \cap \mathbb{C}(0,1)$であるが， $W \neq (W \cap \mathbb{C}(1,0)) \oplus (W \cap \mathbb{C}(0,1)) = V$である．

（*proof.*）$z, z' \in Z(A)$のとき，$a \in A$に対して$a(z+z') = az+az' = za+z'a = (z+z')a$より$z+z' \in Z(A)$であるから部分空間である．次数付きを示すには，$Z(A) = (Z(A) \cap A_0) \oplus (Z(A) \cap A_1)$を示せば良い．つまり，$z = z_0 + z_1, z_i \in A_i$と分解したとき（この分解は一意的），$z_i \in Z(A)$を示せば良い． $x \in A_0$か，あるいは$x \in A_1$とする． $z = z_0 + z_1 \in Z(A)$であるから， $x(z_0 + z_1) = (z_0 + z_1)x$であるが，$(xz_0 - z_0x) + (xz_1 - z_1x) = 0$であり，第1,2項は異なる次数を持つから，$z_0, z_1$はいずれも中心$Z(A)$の元であることがわかる．//

- 次数付き代数Aが中心的（central）であるとは，$Z(A) \cap A_0$が1のk数倍であるとき． [3]
- 次数付き代数Aが単純（simple）であるとは，Aが$0, A$以外の（つまり，真の(proper)）次数付き両側イデアルを持たないとき．

Iが次数付け両側イデアルとは，IはAの両側イデアルであってかつ次数付き部分空間であること．

例として，$A = \mathbb{C}\sigma_0 \oplus \mathbb{C}\sigma_3$の場合を考える．まず次数付けを忘れてイデアルを見つける． [4] 左イデアルである条件は，$I = \mathbb{C}(\sum_{i=0,1,2,3} x_i\sigma_i)$とすると，$AI \subset I$より，$a\sigma_0 + b\sigma_3 \in A$として，

$$(a\sigma_0 + b\sigma_3)(x_0\sigma_0 + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3) = (ax_0 + bx_3)\sigma_0 + (ax_1 - ibx_2)\sigma_1 + (ax_2 + ibx_1)\sigma_2 + (ax_3 + bx_0)\sigma_3$$

より，任意の$a, b \in \mathbb{C}$に対して$ax_1 - ibx_2 = ax_2 + ibx_1 = 0$であり，またこのとき，$(ax_0 + bx_3)x_3 = (ax_3 + bx_0)x_0$，つまり$x_3^2 = x_0^2$が条件．よって，左イデアルは$I_\pm = \mathbb{C}(\sigma_0 \pm \sigma_3)$．$I_\pm$は右イデアルでもあるので，結局，$I_\pm$のみが両側イデアル．一方で，$I_\pm \cap \mathbb{C}\sigma_0 = \mathbb{C}\sigma_0, I_\pm \cap \mathbb{C}\sigma_3 = \mathbb{C}\sigma_3$であるので，$I_\pm$は次数付き両側イデアルではない．よって，$A$は次数付き代数として単純． Aの中心はA自身であるのでAは次数なしとして中心的ではないが，$A \cap A_0 = A_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$であるので，$A$は次数付き代数として中心的.

以下，Aを次数付き単純代数とする．また，イデアルと書くと両側イデアルを指すものとする．

Lemma 2.1. $A_1^2 = A_0$．また，IがA_0の真のイデアルであるとき，$I + A_1IA_1 = A_0$，$A_1I + IA_1 = A_1$.

（*proof.*）定義から$A_1^2 \subset A_0$である． $A_1^2 = A_0$は任意の元$x_0 \in A_0$が$x_1, x_1' \in A_1$として$x_0 = x_1x_1'$と書けることを意味する． $A_1^2 \neq A_0$と仮定する． $A_1^2 + A_1$は次数付き部分空間であり， [5]$A_1^2 + A_1 \neq A$である． $A_1^2 + A_1$が両側イデアルであることを示す． $A_0(A_1A_1 + A_1) \subset A_1A_1 + A_1$， $A_1(A_1A_1 + A_1) \subset A_0A_1 + A_1A_1 \subset A_1 + A_1A_1$より．右イデアルも同様.

後半を示す． $A_0I \subset I, IA_0 \subset I$である．このとき，$A_0(I + A_1IA_1 + A_1I + IA_1) \subset I + A_1IA_1 + A_1I + IA_1$, $A_1(I + A_1IA_1 + A_1I + IA_1) \subset A_1I + A_0IA_1 + A_0I + A_1IA_1 \subset A_1I + IA_1 + I + A_1IA_1$であり，右作用も同様．よって，$I + A_1IA_1 + A_1I + IA_1$は両側イデアル．また，$I + A_1IA_1 + A_1I + IA_1 = (I + A_1IA_1) \oplus (A_1I + IA_1)$は次数付き部分群であるので， $I + A_1IA_1 + A_1I + IA_1$は次数付き両側イデアル．次数付き単純性の仮定より，$I + A_1IA_1 + A_1I + IA_1 = A$，つまり，題意を得る．//

Lemma 2.2. JがAの真の（次数なし）イデアルであるとき，射影$\pi_i : J \to A_i$は同型写像.

（*proof.*）仮定より，$AJ \subset J, JA \subset J$であり，$J$は0でも$A$自身でもない． [6] まず，$J \cap A_0$と$\pi_0(J)$の違いに注意．前者は集合としての共通部分であるが，後者は$a \in J \subset A$に対して，$a = a_0 + a_1, a_i \in A_i$,と分解し，$\pi_i(a) = a_i$と定義される.

$J \cap A_0$はA_0のイデアルである．実際，$x_0 \in J \cap A_0, a_0 \in A_0$に対して， $a_0, x_0 \in A_0$より$a_0x_0 \in A_0$．また，$x_0 \in J$であるから仮定より$a_0x_0 \in J$． よって，$a_0x_0 \in J \cap A_0$．右作用も同様.

[3] $k \in A_0$に注意.
[4] Iが次数付き左（右）イデアルであるとき，Iは次数なしの（左）右イデアルであるから，次数なしの左（右）イデアルをまず見つける.
[5] ベクトル空間の和$V + W$は $V + W = \{v + w | v \in V, w \in W\}$が定義.
[6] Jは次数付きイデアルではないことに注意． $J = J_0 \oplus J_1$のような分解は実行できない.

$\pi_0(J)$はA_0のイデアルである．まず，$a_0 \in A_0, x = x_0 + x_1 \in J$に対して，$\pi_0(a_0 x) = \pi_0(a_0 x_0 + a_0 x_1) = a_0 x_0 = a_0 \pi_0(x)$に注意する．よって，$a_0 \in A_0$に対して，$a_0 \pi_0(x) = \pi_0(a_0 x) \in \pi_0(J)$より，$A_0 \pi_0(J) \subset \pi_0(J)$．右作用も同様.

$J \cap A_0 = \pi_0(J)$ならばJは次数付き部分空間であることを示す． $\pi_0(J) \oplus \pi_1(J)$はAの次数付き部分空間であるので， $J \cap A_1 = \pi_1(J)$を示せば良い． $x_1 \in J \cap A_1$に対して，$x_1 = \pi_1(x_1)$であるので，$J \cap A_1 \subset \pi_1(J)$は仮定$J \cap A_0 = \pi_0(J)$とは無関係に成立．一方で，$x_1 \in \pi_1(J)$のとき，ある$x \in J$が存在して$x = x_0 + x_1, x_0 \in A_0$であるが，$x_0 = \pi_0(x) = J \cap A_0 \in J$．よって，$x_1 = x - x_0 \in J$となり，$x_1 \in J \cap A_1$，つまり， $\pi_1(J) \subset J \cap A_1$．よって，$J \cap A_0 = \pi_0(J)$を仮定すると，$J$は非自明な次数付き両側イデアルとなり，$A$の単純性に反する．よって，$J \cap A_0 = \pi_0(J)$ではありえない.

$A_1 J A_1 \subset J, A_1 A_0 A_1 \subset A_0$に注意すると，$A_1(J \cap A_0)A_1 \subset J \cap A_0$が成立する．また，$A_1 \pi_0(J) A_1 \ni a_1 \pi_0(x) a_1 = \pi_0(a_1 x a_1)$であるが，$A_1 J A_1 \subset J$より$\pi_0(a_1 x a_1) \in \pi_0(J)$であるから$A_1 \pi_0(J) A_1 \subset \pi_0(J)$が成立する．よって，$I = J \cap A_0, \pi_0(J)$のいずれも$A_1 I A_1 \subset I$を満たす． $I + A_1 I A_1 = I$となり，Lemma2.1後半より，IがA_0の真のイデアルであるとき$I + A_1 I A_1 = A_0$であるから，$J \cap A_0, \pi_0(J)$はA_0の真のイデアルではありえない．よって$0, A_0$のいずれかであるが，$J \cap A_0 = A_0$かつ$\pi_0(J) = 0$はありえないので，$J \cap A_0 \neq \pi_0(J)$に注意すると，$J \cap A_0 = 0, \pi_0(J) = A_0$である．よって，$\pi_0 : J \to A_0$は全射であり，$\mathrm{Ker}\, \pi_1 = \{x \in J | x = x_0 \in A_0\} = J \cap A_0$であるから，$\pi_1$は単射.

$J \cap A_1 = 0$を示す． JはAのイデアルであるから$A_0(J \cap A_1) \subset J \cap A_1$であるが，$1 \cdot A_0$に注意すると$J \cap A_1 \subset A_0(J \cap A_1)$も成立．すると，$J \cap A_1 = A_0(J \cap A_1) = A_1^2(J \cap A_1) \subset A_1(J \cap A_0) = 0$. よって，$\pi_0$は単射.

$\pi_1(J) = A_1$を示す． $A_1 \subset \pi_1(J)$を示せば良い． $\pi_0(J) = A_0$であるので$1 = \pi_0(x)$なる$x \in J$が存在する．すると$a_1 \in A_1$に対して，$a_1 = 1 \cdot a_1 = \pi_0(x) a_1 = \pi_1(x a_1) \in \pi_1(J)$．よって，$\pi_1$は全射． //

Lemma 2.3. Aは（次数なし）単純であるか，または，A_0が単純でかつ$u^2 = 1$なる$u \in Z(A) \cap A_1$を用いて$A_1 = A_0 u$と書ける．

（*proof.*）以下Aが次数なし単純でないと仮定する．

Aの真のイデアルJが存在しLemma2.2が適用される． $\pi_i : J \to A_i$は同型写像である．$u = \pi_1 \pi_0^{-1}(1 \in A_0) \in A_1$と置くと，[7] $\pi_0^{-1}(1), \pi_1^{-1}(u) \in J$より，$J$の線形性より$J$は$1 + u$なる元を含む.

Lemma2.2より$J \cong A_0, A_1$でありJの元$x \in J$は分解$x = x_0 + x_1$のどちらか片方の元$x_i \in A_i$で決まることに注意する.

$AJ \subset J$より $u(1 + u) = u^2 + u \in J$であるので，$u^2 = 1$.

任意の元$a \in A$に対して$a = a_0 + a_1, a_i \in A_i$とする． $a_0 \in A_0$に対して$a_0(1 + u) = a_0 + a_0 u \in J, (1 + u)a_0 = a_0 + u a_0 \in J$であるので，$u a_0 = a_0 u$. $a_1 \in A_1$に対して$a_1(1 + u) = a_1 u + a_1 \in J, (1 + u)a_1 = u a_1 + a_1 \in J$であるので，$u a_1 = a_1 u$. 結局，$au = ua$となり，$u$は中心．よって，$u \in Z(A) \cap A_1$.

$A_1 = A_0 u$を示す．自明に$A_0 u \subset A_1$．もう一方の包含関係は，$A_1 = A_1 \cdot 1 = A_1 u^2 = (A_1 u)u \subset (A_0)u$より.

最後にA_0が単純であることを示す． IをA_0のイデアルとすると，$A_0 I = I A_0 = I$に注意して，$A_1 I A_1 = A_0 u I A_0 u = A_0 u I u = A_0 I u^2 = I$. よって，$I + A_1 I A_1 = I$となり，Lemma2.1より，$I$は$A_0$の真のイデアルではない． //

以下，Aを次数付き中心的単純代数とする.

Lemma 2.4. AとA_0のいずれか一方のみが，次数なし中心的単純代数.

[7] $A = \mathbb{C}\sigma_1 \oplus \mathbb{C}\sigma_3$の場合は，例えば，$J = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$であり，同型写像はそれぞれ$\pi_0, \pi_1 : \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto 2x\sigma_0, 2x\sigma_3$で与えられる．このとき，$u = \sigma_3$.

（*proof.*） Aが中心的とすると，$Z(A)=k$． Lemma2.3よりAが単純でなければ$u\in Z(A)\cap A_1$が存在し矛盾するので，Aが中心的であればAは単純.

Aが中心的ではない，つまり，$Z(A)\neq k$とする．

Aは次数付き中心的であるから，$Z(A)\cap A_0=k$． よって，ゼロでない部分空間$V=Z(A)\cap A_1$が存在する． $V^2\subset Z(A)\cap A_0=k$である．仮に$v^2=0$なる$v\in V\subset Z(A)$が存在したとすると，$Z(A)$は体でないので，(Aii)より$A$は単純ではなく，よってLemma2.3より$A_0$は単純.

残る場合分けは，任意の$u\in V$について$u^2=a\neq 0\in k$の場合であるが，このとき，$A_1=A_1a=A_1u^2\subset A_0u$かつ$A_0u\subset A_1$であるから$A_1=A_0u$. $Z(A_0)$が中心的であることを示す． $A_1=A_0u$より任意の元$a\in A$は$a=a_0+a_0'u, a_0, a_0'\in A_0$と分解される． uはAの中心であるので，zは任意のAの元と可換，つまり，$z\in k$． よって，$Z(A_0)=k$． A_0が単純であることを示す． IがA_0の非自明なイデアルならば，$I+Iu$はAの非自明な次数付きイデアルであるので，Aが次数付き単純である点に反する．よって，A_0は単純.

最後に，AとA_0が共に中心的単純であると仮定し，矛盾を導く． $B=\{a\in A|aa_0=a_0a \text{ for all } s\in A_0\}$を$A_0$の中心化群とする.

References

[1] C.T.C. Wall. Graded brauer groups. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 213:187–199, 1964.