Weylの不等式

塩崎　謙

July 26, 2024

Aを$n \times n$エルミート行列とする．Aの固有値を大きいものから並べる．

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n. \tag{1}$$

エルミート行列A, Bに対して，固有値の集合$\{\lambda_i(A+B)\}_i$と$\{\lambda_i(A)\}_i, \{\lambda_i(B)\}_i$の間に成立する不等式が知りたい．

例えば最大固有値については何が言えるだろうか．行列Xの$\lambda = \lambda_i(X)$なる固有値の規格化された固有状態をv_i^Xと書く．すると，

$$\lambda_1(A+B) = (v_1^{A+B}, (A+B)v_1^{A+B}) = (v_1^{A+B}, Av_1^{A+B}) + (v_1^{A+B}, Bv_1^{A+B}) \tag{2}$$

$$\leq (v_1^A, Av_1^A) + (v_1^B, Bv_1^B) = \lambda_1(A) + \lambda_1(B). \tag{3}$$

より一般には，以下が成立する．

Weylの不等式.

$$\lambda_{i+j-1}(A+B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \leq \lambda_{i+j-n}(A+B) \tag{4}$$

（証明 [1]） Min-max定理より，

$$\lambda_{i+j-1}(A+B) = \max_{V, \dim V = i+j-1} \min_{x \in V, ||x||=1} (x, (A+B)x), \tag{5}$$

$$\lambda_i(A) = \min_{V, \dim V = n-i+1} \max_{x \in V, ||x||=1} (x, Ax), \tag{6}$$

$$\lambda_j(B) = \min_{V, \dim V = n-j+1} \max_{x \in V, ||x||=1} (x, Bx). \tag{7}$$

よってある部分空間V_{A+B}, V_A, V_Bが存在して

$$\lambda_{i+j-1}(A+B) = \min_{x \in V_{A+B}, ||x||=1} (x, (A+B)x), \quad \dim V_{A+B} = i+j-1, \tag{8}$$

$$\lambda_i(A) = \max_{x \in V_A, ||x||=1} (x, Ax), \quad \dim V_A = n-i+1, \tag{9}$$

$$\lambda_j(B) = \max_{x \in V_B, ||x||=1} (x, Bx), \quad \dim V_B = n-j+1. \tag{10}$$

このとき，

$$\dim(V_A \cap V_B) = \dim V_A + \dim V_B - \dim(V_A \cup V_B) \geq \dim V_A + \dim V_B - n = n-i-j+2, \tag{11}$$

$$\dim(V_{A+B} \cap (V_A \cap V_B)) = \dim V_{A+B} + \dim(V_A \cap V_B) - \dim(V_{A+B} \cup (V_A \cap V_B)) \tag{12}$$

$$\geq (i+j-1) + (n-i-j+2) - n = 1 \tag{13}$$

より，非ゼロのベクトル

$$x_0 \in V_{A+B} \cap V_A \cap V_B \tag{14}$$

を取ることができる．すると，

$$\lambda_{i+j-1}(A+B) \leq (x_0, (A+B)x_0) = (x_0, Ax_0) + (x_0, Bx_0) \leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \tag{15}$$

より左側の不等式を得る．主張の右側の不等式は，左側の不等式の(-1)倍で得られる． □

系として，以下を得る．

特異値に関するWeylの不等式.

$$\sigma_{i+j-1}(A+B) \leq \sigma_i(A) + \sigma_j(B) \tag{16}$$

（証明） Aの特異値はエルミート行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} & A \\ A^\dagger & \end{pmatrix} \tag{17}$$

の非負固有値である．

$$\lambda_i = \sigma_i \quad i = 1, \ldots, n, \quad \lambda_{n+1} = -\sigma_{n-i+1} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

と定義すると，Weylの不等式

$$\lambda_{i+j-1}(\tilde{A}+\tilde{B}) \leq \lambda_i(\tilde{A}) + \lambda_j(\tilde{B}) \leq \lambda_{i+j-2n}(\tilde{A}+\tilde{B}) \tag{19}$$

が成立． $i+j-1 \leq n$に制限する． □

References

[1] Wikipedia, *Weyl's inequality*, url.