

# 非共形な $Z_2$ 対称性によって守られたトポロジカル絶縁体のモデル

塩崎 謙\*

2015 年 2 月 1 日

空間 2 次元の pg の対称性によって守られたトポロジカル絶縁体の分類は

$$K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta+0}(T^2) = \mathbb{Z}, \quad K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta+1}(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \quad (1)$$

で与えられる. [1]  $Z_2$  が作用するトーラスを  $T^2 = S^1 \times \tilde{S}^1$  と書く.  $S^1$  を  $x$  方向,  $\tilde{S}^1$  を  $y$  方向の波数とする.  $S^1$  へは自明に  $Z_2$  が作用し,  $\tilde{S}^1$  へは  $Z_2$  が  $e^{ik_y} \mapsto e^{-ik_y}$  と作用している. pg は  $x$  方向への半並進を伴うような非共形空間群である.

pg のねじれの  $S^1$  の  $S^1 \times \tilde{S}^1$  への包含写像  $i_1: S^1 \rightarrow S^1 \times \tilde{S}^1$  による引き戻しは  $S^1$  に  $Z_2$  が自明に作用するときの非自明なねじれに対応し, このときの捩れ同変 K 群は

$$K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta+0}(S^1) = \mathbb{Z}, \quad K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta+1}(S^1) = \mathbb{Z} \quad (2)$$

で与えられるので [2]  $K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta+n}(T^2)$  の  $\mathbb{Z}$  部分についてはハミルトニアンに  $k_y$  方向の依存性がない “weak index” として理解できる. 一方で  $K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta+1}(T^2)$  の  $\mathbb{Z}_2$  部分は 2 次元系において初めて実現する “strong index” である.\*1 本ノートではこの  $\mathbb{Z}_2$  のモデルを考えたい.

以下では, まず最初に次のような 1 次元の非共形な反対称性をもつ対称性クラス:

$$U_{1D}(k_x)H_{1D}(k_x)U_{1D}(k_x) = -H_{1D}(k_x), \quad U_{1D}(k_x) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1_{N \times N} \quad (3)$$

の分類が  $\mathbb{Z}_2$  を示すことを示し, さらに生成子のモデルは  $k_x$  依存しないもので与えられることを示す.  $\mathbb{Z}_2$  が自明なハミルトニアンと非自明なハミルトニアンをそれぞれ  $H_0$  と  $H_1$  とし, ハミルトニアンの次元を懸垂のような操作で以下の 2 通りの方法で次元を上げる.

$$(I) \quad \begin{cases} H_{2D}(\phi, 0/1) := \cos \phi \tau_y \otimes H_{0/1} + \sin \phi \tau_x \otimes \sigma_0 \otimes 1_{N \times N}, & \phi \in [-\pi/2, \pi/2], \\ U_{2D}(k_x) := \tau_x \otimes U_{1D}(k_x). \end{cases} \quad (4)$$

$$(II) \quad \begin{cases} H_{2D}(\phi, 0/1) := \cos \phi \tau_y \otimes H_{0/1} + \sin \phi \tau_x \otimes \sigma_0 \otimes 1_{N \times N}, & \phi \in [-\pi/2, \pi/2], \\ U_{2D}(k_x) := \tau_z \otimes U_{1D}(k_x). \end{cases} \quad (5)$$

両者の違いは  $U_{2D}(k_x)$  の定義のみである. ここで  $\tau, \sigma$  などは Pauli 行列であり,  $\sigma$  は半並進によって移り変わる単位胞ないの自由度である.  $\phi = \pm\pi/2$  においてハミルトニアン  $H_{2D}(\phi, 0/1)$  は 0/1 に依存しないので  $\phi = \pm\pi/2$  は繋がっており  $S^1$  上で定義されている. 上の (I),(II) によってマップされたハミルトニアンはそれぞれ次のような対称性クラスに属する:

$$S_I \quad \begin{cases} \Gamma H_{2D}(k_x, k_y) \Gamma^{-1} = -H_{2D}(k_x, k_y), & \Gamma = \tau_z \otimes \sigma_0 \otimes 1_{N \times N}, \\ U_{2D}(k_x) H_{2D}(k_x, k_y) U_{2D}(k_x)^{-1} = H_{2D}(k_x, k_y), \\ \Gamma U_{2D}(k_x) = -U_{2D}(k_x) \Gamma. \end{cases} \quad (6)$$

$$S_{II} \quad \begin{cases} \Gamma H_{2D}(k_x, k_y) \Gamma^{-1} = -H_{2D}(k_x, k_y), & \Gamma = \tau_z \otimes \sigma_0 \otimes 1_{N \times N}, \\ U_{2D}(k_x) H_{2D}(k_x, k_y) U_{2D}(k_x)^{-1} = H_{2D}(k_x, -k_y), \\ \Gamma U_{2D}(k_x) = U_{2D}(k_x) \Gamma. \end{cases} \quad (7)$$

\* Ken Shiozaki, Email: shiozaki@scphys.kyoto-u.ac.jp

\*1  $Z_2$  作用は  $x$  方向の半並進を伴うので, 包含  $\tilde{S}^1 \rightarrow S^1 \times \tilde{S}^1$  に伴う  $k_x$  依存しないようなハミルトニアンを考えてもそれは “weak index” に対応しないと思うので, ここでは  $k_x$  依存しないハミルトニアンを考えていません.

$S_{II}$  は 2 次元でカイラル対称性と  $pg$  の対称性が存在し, カイラル対称性と  $pg$  が可換な対称性クラスであり  $K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta+1}(T^2)$  に対応すると思われる.  $S_I$  は 2 次元でカイラル対称性と  $x$  方向の半並進からなる  $\mathbb{Z}_2$  がトラス  $T^2$  に自明に作用する対称性が存在し, 両者が反可換であるような対称性クラスである.  $S_{II}$  の対称性クラスにおいては対称性を保つ境界は存在しない. 一方で  $S_I$  の対称性クラスは  $x$  軸に平行な境界は対称性を保つので, バルクが  $\mathbb{Z}_2$  非自明であれば境界ギャップレス状態を持つと予想される. 境界ギャップレス状態の安定性について調べることにより,  $S_I$  の対称性クラスが  $\mathbb{Z}_2$  の分類を持つことについて議論する. さらにもう 1 次元上げることにより 3 次元の  $pg$  のモデルとギャップレス状態の安定性についても議論する.

## 目次

1	1 次元モデル	2
2	2 次元モデル	4
2.1	対称性 $S_I$	4
2.2	対称性 $S_{II}$	7
3	3 次元 $pg$ のモデル	7
4	分散を持った表面状態のモデルについて	8
4.1	2 次元モデル	8
4.2	3 次元モデル	9
5	トポロジカル不変量	10
5.1	1 次元系	10
5.2	2 次元系	11
5.3	3 次元系	12
6	$K$ 理論より	14
6.1	低次元への分解	14
6.1.1	3 次元 $pg$	14
6.1.2	3 次元 $pmg$	15
6.2	次元を上げるときのハミルトニアン Map について	17

## 1 1 次元モデル

1 次元で半並進に伴う  $\mathbb{Z}_2$  の反対称性が存在する系を考える. (図 1) 半並進に伴う内部自由度の変換は存在しないものとする. 波数空間において, このような対称性は

$$U_{1D}(k_x)H_{1D}(k_x)U_{1D}(k_x) = -H_{1D}(k_x), \quad (8)$$

$$U_{1D}(k_x) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1_{N \times N}. \quad (9)$$

と表示される. ここで  $\begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  の空間は単位胞内の 2 自由度 (A と B) に対応する.  $1_{N \times N}$  は今考えている対称性変換が A と B の内部自由度に対して自明に作用することを示す.

上記の対称性によりハミルトニアンは A と B の空間を行列表示して

$$H_{1D}(k_x) = \begin{pmatrix} H_{AA}(k_x) & -iH_{AB}(k_x)e^{-ik_x/2} \\ iH_{AB}(k_x)e^{ik_x/2} & -H_{AA}(k_x) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} H_{AA}(k_x)^* &= H_{AA}(k_x), \quad H_{AB}(k_x)^* = H_{AB}(k_x), \\ H_{AA}(2\pi) &= H_{AA}(0), \quad H_{AB}(2\pi) = -H_{AB}(0). \end{aligned} \quad (11)$$

と表示できることがわかる. ここで  $H^*$  は  $H$  のエルミト共役である. これはユニタリ行列  $V(k_x) \in U(N)$  を

$$V(k_x) = H_{AA}(k_x) + iH_{BB}(k_x) \quad (12)$$

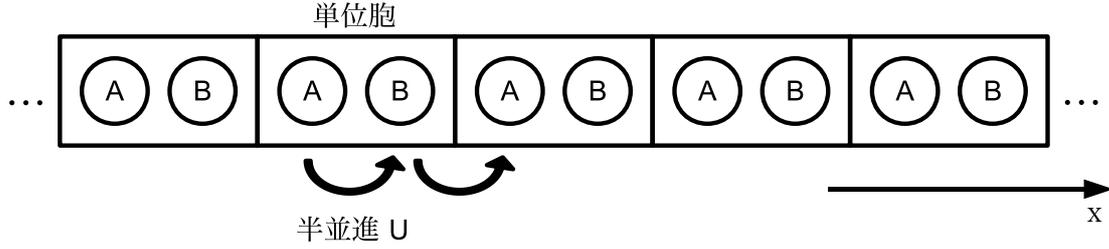


図 1

で導入すると

$$V(2\pi) = V(0)^* \quad (13)$$

なる境界条件をもつユニタリ行列と同値である．したがって分類は境界条件 (13) をもつユニタリ行列  $V(k_x)$  の分類に他ならない．

さて  $U(N) = U(1) \times SU(N)$  のうち  $SU(N)$  部分については境界条件 (13) を保ったまま常に 1 点に潰すことができる．よって  $U(1)$  部分のみ見ればよい． $e^{i\theta(k_x)} = \det V(k_x)$  とおくと境界条件 (13) は  $U(1)$  部分について

$$\theta(2\pi) = -\theta(0) \pmod{2\pi} \quad (14)$$

となる．この条件のもと  $\theta(k_x)$  は  $\theta = 0$  と  $\pi$  のどちらか一方のみを奇数回通過する．よって  $\mathbb{Z}_2$  の分類が生じる：

- $\mathbb{Z}_2 = 0$ :  $\theta = 0$  を奇数回通過する．
- $\mathbb{Z}_2 = 1$ :  $\theta = \pi$  を奇数回通過する．

$\mathbb{Z}_2$  の生成子となるモデルは  $N = 1$  (つまり, A, B に内部自由度が存在しない) で

$$\mathbb{Z}_2 = 1: V(k_x) \in U(1), V(k_x) = -1, H_1(k_x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

で与えられるような  $k_x$  依存しない, つまり  $x$  方向の結合の存在しないハミルトニアンである．同じ  $N = 1$  で自明なモデルは

$$\mathbb{Z}_2 = 0: V(k_x) \in U(1), V(k_x) = 1, H_0(k_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

で与えられる． $H_0(k_x)$  は A にのみ電子が詰まった状態を,  $H_1(k_x)$  は B にのみ電子が詰まった状態をそれぞれ基底状態としてもつ． $\mathbb{Z}_2$  非自明性の物理的意味は対称性によって  $H_0(k_x)$  から  $H_1(k_x)$  にギャップを閉じずに移り変わることが不可能であることを意味する．

$\mathbb{Z}_2$  であることを確認するため  $H_1(k_x) \oplus H_1(k_x)$  が自明相,  $H_0(k_x) \oplus H_0(k_x)$  にギャップを閉じずに変形できることを確認する． $V(k_x)$  において確認すれば十分である． $V(k_x) \in U(2)$  である． $t \in [0, 1]$  として  $V(k_x, t) \in U(2)$  で

$$V(k_x, t = 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, V(k_x, t = 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

で境界条件 (13) を満たすものが存在することを示せばよい．これは

$$V(k_x, t) = \begin{pmatrix} -\cos(\pi t) & e^{ik_x/2} \sin(\pi t) \\ -e^{-ik_x/2} \sin(\pi t) & -\cos(\pi t) \end{pmatrix} \quad (18)$$

と選べる．よって確かに  $\mathbb{Z}_2$  の分類が生じている．

## 2 2次元モデル

前節の  $\mathbb{Z}_2$  非自明なモデルは懸垂のような操作により2次元の  $\mathbb{Z}_2$  非自明なモデルにマップされると期待できる。

$N = 1$  とし,  $H_0, H_1$  をそれぞれ  $\mathbb{Z}_2 = 0, 1$  の  $k_x$  依存しないモデル:

$$H_0 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$H_1 = -\sigma_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

とする。ここで  $\sigma_\mu$  ( $\mu = 0, x, y, z$ ) は単位胞内の半並進で移り変わる自由度 A, B の空間のパウリ行列である。(  $\sigma_0$  を単位行列とする。 )

ハミルトニアンを上げたい。1次元のモデルはカイラル対称性を有していないので(次数  $n = 0$ )、ハミルトニアンは A, B 内の内部自由度を2倍にして(この2倍にした自由度の空間のパウリ行列を  $\tau$  とする)

$$H_{2D}(k_x, \phi, 0/1) := \cos \phi \tau_y \otimes \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ -\sigma_z \end{Bmatrix} + \sin \phi \tau_x \otimes \sigma_0, \quad \phi \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (21)$$

と次元を上げる。  $H_{2D}(k_x, \phi, 0/1)$  は  $\phi = \pm\pi/2$  において  $0/1$  に依存していないので2次元トラス  $T^2$  上で定義されているとみなして良い。  $\phi$  を  $\pm\pi/2$  でくっつけてできる  $S^1$  のパラメタを  $k_y$  とする。結局マップされたハミルトニアンは

$$H_{2D}(k_x, k_y) = \cos k_y \tau_y \otimes \sigma_z + \sin k_y \tau_x \otimes \sigma_0 \quad (22)$$

となる。ハミルトニアン  $H_{2D}(k_x, k_y)$  はカイラル対称性

$$\Gamma H_{2D}(k_x, k_y) \Gamma^{-1} = H_{2D}(k_x, k_y), \quad \Gamma = \tau_z \otimes \sigma_0 \quad (23)$$

を持つ。(22) のハミルトニアン  $H_{2D}(k_x, k_y)$  が  $\mathbb{Z}_2$  非自明な2次元のモデルであると思われる。

$\mathbb{Z}_2$  の対称性  $U_{1D}(k_x)$  のマップの方法は以下の2通り存在する:

$$(I) \quad U_{2D}(k_x) := \tau_x \otimes U_{1D}(k_x), \quad (24)$$

$$(II) \quad U_{2D}(k_x) := \tau_z \otimes U_{1D}(k_x), \quad (25)$$

カイラル対称性 (23) に加えて、それぞれ以下のような対称性にマップされている:

$$S_I : \begin{cases} U_{2D}(k_x) H_{2D}(k_x, k_y) U_{2D}(k_x)^{-1} = H_{2D}(k_x, k_y), \\ \Gamma U_{2D}(k_x) = -U_{2D}(k_x) \Gamma. \end{cases} \quad (26)$$

$$S_{II} : \begin{cases} U_{2D}(k_x) H_{2D}(k_x, k_y) U_{2D}(k_x)^{-1} = H_{2D}(k_x, -k_y), \\ \Gamma U_{2D}(k_x) = U_{2D}(k_x) \Gamma. \end{cases} \quad (27)$$

$S_I$  の対称性操作は  $x$  方向の半並進のみなので  $x$  軸に平行な境界を取ると境界は対称性を満たすので境界ギャップレス状態の出現が期待できる。 $S_{II}$  の対称性操作は  $x$  方向の半並進に加えて  $y$  方向の鏡映操作を伴うような非共形空間群なので対称性を満たす境界が存在しない。以下、それぞれの対称性クラスについて記述する。

### 2.1 対称性 $S_I$

もう一度対称性を書くと

$$S_I : \begin{cases} \Gamma H_{2D}(k_x, k_y) \Gamma^{-1} = -H_{2D}(k_x, k_y), \quad \Gamma = \tau_z \otimes \sigma_0, \\ U_{2D}(k_x) H_{2D}(k_x, k_y) U_{2D}(k_x)^{-1} = H_{2D}(k_x, k_y), \quad U_{2D}(k_x) = \tau_x \otimes \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma U_{2D}(k_x) = -U_{2D}(k_x) \Gamma. \end{cases} \quad (28)$$

である．このような対称性が存在するねじれ同変  $K$  群の計算をここでは行わない．ここでは懸垂操作で予想される  $\mathbb{Z}_2$  非自明なモデルについて，そのギャップレス状態の安定性について調べる．

ギャップレス状態を解析的に与えるための連続モデルを考える．それにはまず (22) のモデルを

$$H_{2D}(k_x, k_y) = (m + \cos k_y) \tau_y \otimes \sigma_z + \sin k_y \tau_x \otimes \sigma_0 \quad (29)$$

と変形する．このハミルトニアンバルクのエネルギー・スペクトル  $E(k_x, k_y)$  は

$$[E(k_x, k_y)]^2 = (m + \cos k_y)^2 + \sin^2 k_y \quad (30)$$

で与えられるのでギャップが閉じるパラメタ  $m$  の値は  $m = \pm 1$  である． $-1 < m < 1$  のとき境界ギャップレス状態を示す． $m \sim -1$  では場合は  $k_y = 0$  近傍が重要になる．そこで  $k_y \sim 0$  で近似する：

$$H_{2D}(k_x, k_y) = (m + 1 - \frac{1}{2}k_y^2)\tau_y \otimes \sigma_z + k_y\tau_x \otimes \sigma_0 \quad (31)$$

$y = 0$  を境界とし， $y > 0$  をトポロジカル絶縁体， $y < 0$  を真空とし  $y = 0$  で波動関数がゼロであるような固定端境界条件とする． $y$  方向の並進対称性が存在しないのでハミルトニアンは  $k_y$  を微分  $-i\partial_y$  に戻し

$$\hat{H}_{2D}(k_x) := (m + 1 + \frac{1}{2}\partial_y^2)\tau_y \otimes \sigma_z - i\partial_y\tau_x \otimes \sigma_0, \quad (m > -1) \quad (32)$$

とする．このハミルトニアンは境界  $y = 0$  に局在する 2 つのゼロエネルギー解  $\hat{H}(k_x) |\psi_i(k_x)\rangle = 0$  ( $i = 1, 2$ ),

$$|\psi_1(k_x)\rangle = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-y} \sinh(y\sqrt{-2m-1}), \quad (33)$$

$$|\psi_2(k_x)\rangle = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-y} \sinh(y\sqrt{-2m-1}), \quad (34)$$

を持つ． $N$  は適当な規格化定数である． $|\psi_1(k_x)\rangle, |\psi_2(k_x)\rangle$  はそれぞれ  $\Gamma = \tau_z\sigma_0$  の固有値  $\pm 1$  の状態であり，対称性より  $U_{2D}(k_x) = \tau_x \otimes U_{1D}(k_x)$  で移り変わる：

$$|\psi_2(k_x)\rangle = e^{ik_x} U_{2D}(k_x) |\psi_1(k_x)\rangle, \quad (35)$$

$$|\psi_1(k_x)\rangle = U_{2D}(k_x) |\psi_2(k_x)\rangle. \quad (36)$$

$|\psi_1(k_x)\rangle, |\psi_2(k_x)\rangle$  はカイラル対称性をリスペクトした表記であるが， $U(k_x)$  対称性をリスペクトした基底も可能である．これは  $|\psi_+(k_x)\rangle, |\psi_-(k_x)\rangle$  を用いて

$$\begin{aligned} U(k_x) = e^{-ik_x/2} : \quad |\psi_+(k_x)\rangle &= |\psi_1(k_x)\rangle + e^{-ik_x/2} |\psi_2(k_x)\rangle, \\ U(k_x) = -e^{-ik_x/2} : \quad |\psi_-(k_x)\rangle &= |\psi_1(k_x)\rangle - e^{-ik_x/2} |\psi_2(k_x)\rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

によって与えられる．(規格化定数は略した)  $U(k_x)$  の固有値が  $k_x \mapsto k_x + 2\pi$  で入れ替わることに対応して  $|\psi_+(k_x)\rangle, |\psi_-(k_x)\rangle$  も入れ替わる：

$$|\psi_+(k_x + 2\pi)\rangle = |\psi_-(k_x)\rangle \quad (38)$$

局所的な  $k_x$  でみると 2 つの状態が存在するが全体としては 1 つの状態だと解釈できることに注意されたい．また， $|\psi_+(k_x)\rangle, |\psi_-(k_x)\rangle$  はカイラル対称性のペアである：

$$|\psi_-(k_x)\rangle = \Gamma |\psi_+(k_x)\rangle. \quad (39)$$

このギャップレス状態の安定性について調べよう．境界のギャップレス状態の安定性を調べる問題は同一の対称性を持つ 1 次元系

$$S_{\text{I, Boundary}} : \begin{cases} \Gamma H(k_x) \Gamma^{-1} = -H(k_x), \quad \Gamma = \tau_z \otimes \sigma_0, \\ U_{2D}(k_x) H(k_x) U(k_x)^{-1} = H(k_x), \quad U_{2D}(k_x) = \tau_x \otimes \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma U_{2D}(k_x) = -U_{2D}(k_x) \Gamma. \end{cases} \quad (40)$$

のギャップレス状態の安定性を調べる問題に他ならない．ギャップを誘起する項は  $|\psi_1(k_x)\rangle$  と  $|\psi_2(k_x)\rangle$  の交差項

$$\begin{aligned} H_{pert}(k_x) &= \alpha(k_x) |\psi_1(k_x)\rangle \langle \psi_2(k_x)| + h.c. \\ &= \alpha(k_x) |\psi_1(k_x)\rangle \langle \psi_2(k_x)| + \overline{\alpha(k_x)} |\psi_2(k_x)\rangle \langle \psi_1(k_x)| \end{aligned} \quad (41)$$

である．ここで  $\alpha(k_x) \in \mathbb{C}$  で  $h.c.$  はエルミト共役である．ここで  $|\psi_1(k_x)\rangle$  と  $|\psi_2(k_x)\rangle$  が対称性  $U_{2D}(k_x)$  で (36) により関係づくことに注意すると

$$H_{pert}(k_x) = \alpha(k_x) U_{2D}(k_x) |\psi_2(k_x)\rangle \langle \psi_2(k_x)| + \overline{\alpha(k_x)} |\psi_2(k_x)\rangle \langle \psi_2(k_x)| U_{2D}(k_x)^{-1} \quad (42)$$

となる．この交差項  $H_{pert}(k_x)$  が対称性 (40) を満たす条件を求める．

まずカイラル対称性  $\Gamma H_{pert}(k_x) \Gamma^{-1} = -H_{pert}(k_x)$  は満たす． $Z_2$  の対称性については

$$\begin{aligned} U_{2D}(k_x) H_{pert}(k_x) U_{2D}(k_x)^{-1} \\ = e^{-ik_x} \alpha(k_x) |\psi_2(k_x)\rangle \langle \psi_2(k_x)| U_{2D}(k_x)^{-1} + e^{ik_x} \overline{\alpha(k_x)} U_{2D}(k_x) |\psi_2(k_x)\rangle \langle \psi_2(k_x)| \end{aligned} \quad (43)$$

となり， $\alpha(k_x)$  に対して

$$\alpha(k_x) = e^{ik_x} \overline{\alpha(k_x)} \quad (44)$$

なる条件を課す． $\alpha(k_x)$  は  $S^1$  上で定義されているので，もし全ての  $k_x \in S^1$  上で  $|\alpha(k_x)| \neq 0$  であれば  $\alpha(k_x)$  の位相部分  $\alpha(k_x) = |\alpha(k_x)| e^{i\theta(k_x)}$  について

$$e^{i2\theta(k_x)} = e^{ik_x} \quad (45)$$

となり矛盾する．この条件は  $S^1$  において局所的にしか満たせない．よって必ずある  $\tilde{k}_x \in S^1$  が存在して  $H_{pert}(\tilde{k}_x) = 0$  でなければならない．境界ギャップレス状態が安定であることを意味し，対応する 2 次元のバルクにトポロジカルに非自明相が存在することを示唆する． $\alpha(k_x)$  は結局以下のような形で書ける：

$$\alpha(k_x) = f(k_x) e^{ik_x/2}, \quad f(k_x) \in \mathbb{R}, \quad f(k_x + 2\pi) = -f(k_x). \quad (46)$$

$f(k_x)$  は  $k_x \in [0, 2\pi]$  のどこかで必ずゼロになることに注意されたい．

摂動項  $H_{pert}$  の存在化での端状態についてもう少し具体的に見ておく．摂動項は以下である．

$$\begin{aligned} H_{pert}(k_x) &= f(k_x) e^{ik_x/2} |\psi_1(k_x)\rangle \langle \psi_2(k_x)| + f(k_x) e^{-ik_x/2} |\psi_2(k_x)\rangle \langle \psi_1(k_x)| \\ &= f(k_x) |\psi_+(k_x)\rangle \langle \psi_+(k_x)| - f(k_x) |\psi_-(k_x)\rangle \langle \psi_-(k_x)| \end{aligned} \quad (47)$$

従って  $f(k_x)$  は  $U(k_x) = \pm e^{-ik_x/2}$  のそれぞれのセクターに誘起されるエネルギーのシフトに他ならない． $f(k_x)$  は  $k_x \in [0, 2\pi]$  のどこかでゼロを取ることで端状態は安定に保たれる．

最後に端状態の特徴についてまとめる：

- 通常の 2D の TI とは異なり， $k_x$  の全ての領域に渡って端状態が存在する（ある意味 weak です）．
- Nonsymmorphic な対称性に起因し，エネルギー固有状態は “doublet” ( $\psi_+(k_x), \psi_-(k_x)$ ) を組んでいる．（エネルギー固有値は同一ではない．） $\psi_{\pm}$  はそれぞれ  $U(k_x) = \pm e^{-ik_x}$  の固有状態であり， $k_x \mapsto k_x + 2\pi$  で入れ替わる．
- $(\psi_+(k_x), \psi_-(k_x))$  はカイラル対称なペアである．
- カイラル対称性が存在しなければ  $(\psi_+(k_x), \psi_-(k_x))$  がエネルギーゼロ近傍に固定される理由はないので端状態はバルクに消えてしまい，安定ではない．
- カイラル対称性が存在すると，状態  $(\psi_+(k_x), \psi_-(k_x))$  はエネルギーゼロを中心として対称に存在する． $(\psi_+(k_x), \psi_-(k_x))$  は全体としては繋がっているため必ずエネルギーゼロを切る状態が残る．

端状態の安定性について一言で述べると

- 状態  $(\psi_+(k_x), \psi_-(k_x))$  は繋がっているため，この 2 つの状態をカイラル対称性を満たしながらギャップアウトすることは出来ない．

## 2.2 対称性 $S_{\text{II}}$

もう一度対称性を書くと

$$S_{\text{II}} : \begin{cases} \Gamma H_{2D}(k_x, k_y) \Gamma^{-1} = -H_{2D}(k_x, k_y), \Gamma = \tau_z \otimes \sigma_0, \\ U_{2D}(k_x) H_{2D}(k_x, k_y) U_{2D}(k_x)^{-1} = H_{2D}(k_x, -k_y), U_{2D}(k_x) = \tau_z \otimes \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma U_{2D}(k_x) = U_{2D}(k_x) \Gamma. \end{cases} \quad (48)$$

である．カイラルと  $Z_2$  の pg の対称性が存在し，それらが可換なので  $K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta+1}(T^2)$  に対応すると思われる．2次元系は対称性を満たす境界を持たない．ここではモデルのみ与える．

懸垂操作が予測する  $\mathbb{Z}_2$  非自明なモデルはもちろん (22) と同様の

$$H_{2D}(k_x, k_y) = \cos k_y \tau_y \otimes \sigma_z + \sin k_y \tau_x \otimes \sigma_0. \quad (49)$$

である．

## 3 3次元 pg のモデル

さらにもう1次元，懸垂で次元を上げることが可能である．すると3次元の pg のモデルを得ることができ．具体的には2次元のカイラル対称性が存在するモデル (62) においてカイラル演算子を新たな項として付け加えた次のようなモデルを考える：

$$H_{3D}(k_x, k_y, k_z) = (m + \cos k_y + \cos k_z) \tau_y \otimes \sigma_z + \sin k_y \tau_x \otimes \sigma_0 + \sin k_z \tau_z \otimes \sigma_0. \quad (50)$$

このモデルは pg の対称性

$$U_{2D}(k_x) H_{3D}(k_x, k_y, k_z) U_{2D}(k_x)^{-1} = H(k_x, k_y, -k_z), \quad U_{2D}(k_x) = \tau_x \otimes \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

を持つ．つまり  $z$  方向の鏡映操作に  $x$  方向の半並進を伴う  $Z_2$  の対称性である．上記モデルの境界ギャップレス状態の安定性を調べよう．pg の対称性を破らない表面は  $y$  軸に垂直な面である．

このハミルトニアンバルクのエネルギー・スペクトル  $E(k_x, k_y, k_z)$  は

$$[E(k_x, k_y, k_z)]^2 = (m + \cos k_y + \cos k_z)^2 + \sin^2 k_y + \sin^2 k_z \quad (52)$$

で与えられるのでギャップが閉じるパラメタ  $m$  の値は  $m = -2, 0, 2$  である． $-2 < m < 0$ ，及び  $0 < m < 2$  のとき境界ギャップレス状態を示す． $m \sim -2$  では  $k_y = 0$  近傍が重要になる．そこで  $k_y \sim 0$  で近似する：

$$H_{3D}(k_x, k_y, k_z) = (m + 1 + \cos k_z - \frac{1}{2} k_y^2) \tau_y \otimes \sigma_z + k_y \tau_x \otimes \sigma_0 + \sin k_z \tau_z \otimes \sigma_0, \quad (m > -2, m \sim -2). \quad (53)$$

$y = 0$  を境界とし， $y > 0$  をトポロジカル絶縁体， $y < 0$  を真空とし  $y = 0$  で波動関数がゼロであるような固定端境界条件とする． $y$  方向の並進対称性が存在しないのでハミルトニアンは  $k_y$  を微分  $-i\partial_y$  に戻し

$$\hat{H}_{3D}(k_x, k_z) := (m + 1 + \cos k_z + \frac{1}{2} \partial_y^2) \tau_y \otimes \sigma_z - i\partial_y \tau_x \otimes \sigma_0 + \sin k_z \tau_z \otimes \sigma_0, \quad (m > -2, m \sim -2). \quad (54)$$

とする．このハミルトニアンは  $\cos k_z > m + 1$  のとき境界  $y = 0$  に局在する2つのギャップレス解，

$$\begin{aligned} |\psi_1(k_x, k_z)\rangle &= N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-y} \sinh(y\sqrt{-2m - 2\cos k_z - 1}), \\ \hat{H}_{3D}(k_x, k_z) |\psi_1(k_x, k_z)\rangle &= \sin k_z |\psi_1(k_x, k_z)\rangle, \end{aligned} \quad (55)$$

と

$$\begin{aligned} |\psi_2(k_x, k_z)\rangle &= N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-y} \sinh(y\sqrt{-2m - 2\cos k_z - 1}), \\ \hat{H}_{3D}(k_x, k_z) |\psi_2(k_x, k_z)\rangle &= -\sin k_z |\psi_2(k_x, k_z)\rangle, \end{aligned} \quad (56)$$

を持つ．( $k_z = \pm\pi$  に局在解が存在しないことに注意されたい．)  $N$  は適当な規格化定数である． $|\psi_1(k_x)\rangle, |\psi_2(k_x)\rangle$  は pg の対称性より関係づいている：

$$|\psi_2(k_x, -k_z)\rangle = e^{ik_x} U_{2D}(k_x) |\psi_1(k_x, k_z)\rangle, \quad (57)$$

$$|\psi_1(k_x, -k_z)\rangle = U_{2D}(k_x) |\psi_2(k_x, k_z)\rangle. \quad (58)$$

以下この表面ギャップレス状態の安定性について考える．まず表面状態の次の性質に注意する：

- $k_z$  方向については表面状態は有限の  $k_z$  で消える．(これは  $k_z$  方向の分散を獲得したことによりカイラル対称性が消失したことに対応する．)
- $k_x$  方向については表面状態は全ての  $k_x \in [0, 2\pi]$  において存在する．

したがって表面ギャップレス状態の安定性を示したければ表面状態が存在する  $k_z$  の領域においてギャップアウト出来ないことを示せば良い．

ミラー面  $k_z = 0$  に注目する．ミラー面ではハミルトニアンが  $U(k_x)$  と可換である．カイラル対称性の有無を除けば 2D の場合と同一である．表面状態は  $U(k_x)$  の固有状態である．これを

$$\begin{aligned} U(k_x) = e^{-ik_x/2} : \quad & |\psi_+(k_x)\rangle = |\psi_1(k_x)\rangle + e^{-ik_x/2} |\psi_2(k_x)\rangle, \\ U(k_x) = -e^{-ik_x/2} : \quad & |\psi_-(k_x)\rangle = |\psi_1(k_x)\rangle - e^{-ik_x/2} |\psi_2(k_x)\rangle, \end{aligned} \quad (59)$$

と書く．(規格化定数は略した)  $U(k_x)$  の固有値が  $k_x \mapsto k_x + 2\pi$  で入れ替わることに対応して  $|\psi_+(k_x)\rangle, |\psi_-(k_x)\rangle$  も入れ替わる：

$$|\psi_+(k_x + 2\pi)\rangle = |\psi_-(k_x)\rangle \quad (60)$$

局所的な  $k_x$  でみると 2 つの状態が存在するが全体としては 1 つの状態だと解釈できることに注意されたい．表面状態のギャップアウトはこの状態 ( $|\psi_+(k_x)\rangle, |\psi_-(k_x)\rangle$ ) を 2 つに割ってギャップアウトすることに対応する．しかし ( $|\psi_+(k_x)\rangle, |\psi_-(k_x)\rangle$ ) は繋がっているのでコレは不可能である．

## 4 分散を持った表面状態のモデルについて

### 4.1 2次元モデル

$$S_{\Gamma} : \quad \begin{cases} \Gamma H_{2D}(k_x, k_y) \Gamma^{-1} = -H_{2D}(k_x, k_y), \quad \Gamma = \tau_z \otimes \sigma_0, \\ U_{2D}(k_x) H_{2D}(k_x, k_y) U_{2D}(k_x)^{-1} = H_{2D}(k_x, k_y), \quad U_{2D}(k_x) = \tau_x \otimes \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma U_{2D}(k_x) = -U_{2D}(k_x) \Gamma. \end{cases} \quad (61)$$

において，どのようなバルクの摂動項が端状態に分散を誘起するかを考えよう．先ず，生成子となる素朴なモデルは前節と同様の以下である：

$$H_{2D}(k_x, k_y) = (m + \cos k_y) \tau_y \otimes \sigma_z + \sin k_y \tau_x \otimes \sigma_0 \quad (62)$$

バルクのギャップを保ちつつ端状態に分散を生じさせる項として， $H(k_x, k_y), \Gamma$  と反可換な以下の項が基本的である：

$$V(k_x) = a(k_x) \tau_y \otimes \sigma_x + b(k_x) \tau_y \otimes \sigma_y \quad (63)$$

バルクのエネルギースペクトルは

$$E^2(k_x, k_y) = (m + \cos k_y)^2 + \sin^2 k_y + a^2(k_x) + b^2(k_x) \quad (64)$$

である．条件  $U_{2D}(k_x) H_{2D}(k_x, k_y) U_{2D}(k_x)^{-1} = H_{2D}(k_x, k_y)$  より

$$(a(k_x) + ib(k_x)) e^{-ik_x} = -a(k_x) + ib(k_x) \quad (65)$$

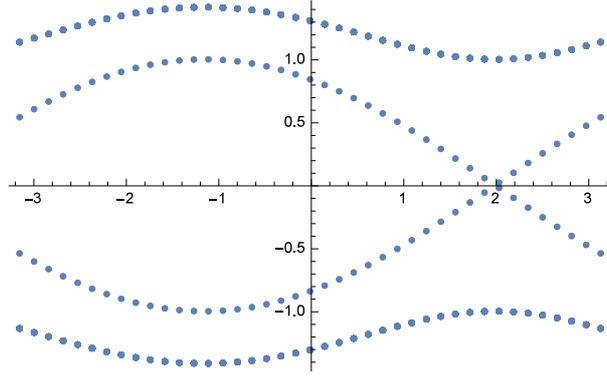


図 2 端状態の計算例 . y 方向を 20 サイトとした . y = 0, 20 の両端の端状態を重ねて書いている .  
 $m = 0, c(k_x) = 2 \sin\left(\frac{k_x - 2}{2}\right)$  とした .

が従う .

$$c(k_x) = -i(a(k_x) + ib(k_x))e^{-ik_x/2} \quad (66)$$

と置くとこの条件は

$$\overline{c(k_x)} = c(k_x), \quad c(k_x + 2\pi) = -c(k_x) \quad (67)$$

と同値である . バルクのエネルギースペクトルは

$$E^2(k_x, k_y) = (m + \cos k_y)^2 + \sin^2 k_y + c^2(k_x) \quad (68)$$

である . 今は  $N = 1$  を考えているので  $c(k_x)$  は唯の関数である . 上の条件はつまり  $c(k_x)$  は実関数で  $2\pi$  だけシフトすると負号がつくという条件である . もちろんこの条件を満たすような一様な  $c(k_x) = \text{const} \neq 0$  は存在しない . この事実が表面状態の安定性に対応する .

$c(k_x)$  として ,  $k_x = \alpha$  でのみギャップを閉じるような取り方は例えば

$$c(k_x) = \sin\left(\frac{k_x - \alpha}{2}\right) \quad (69)$$

と取ればよい . もちろん  $c(k_x)$  の取り方はこの限りではなく , 例えば , ある領域に渡って  $c(k_x) = 0$  となっても良いし , 複数回  $c(k_x) = 0$  となる点が存在しても良い . 端状態の計算例を図 2 に示す .

## 4.2 3次元モデル

前節のモデルにおいて次元を上げて

$$\sin k_z \tau_z \otimes \sigma_0 \quad (70)$$

なる項を付け加えてカイラル対称性を破り , 3次元で pg の対称性 :

$$U_{2D}(k_x)H_{3D}(k_x, k_y, k_z)U_{2D}(k_x)^{-1} = H(k_x, k_y, -k_z), \quad U_{2D}(k_x) = \tau_x \otimes \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (71)$$

が存在する系に移る .<sup>\*2</sup>

素朴なモデルは

$$H_{3D}(k_x, k_y, k_z) = (m + \cos k_y + \cos k_z)\tau_y \otimes \sigma_z + \sin k_y \tau_x \otimes \sigma_0 + \sin k_z \tau_z \otimes \sigma_0. \quad (72)$$

である . このモデルの表面状態は

<sup>\*2</sup> 半並進に際して内部自由度の変換を伴わない  $U_{2D}(k_x) = \tau_0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  の場合にもモデルが作れるかどうか , 気になるところです .

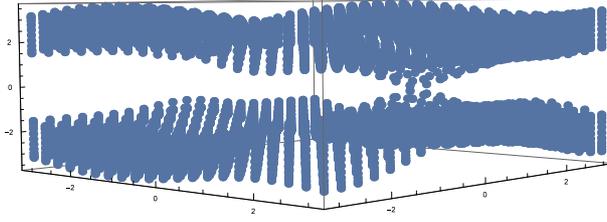


図3 端状態の計算例． $y$  方向を 10 サイトとした． $y = 0, 10$  の両端の表面状態を重ねて書いている．  
 $m = -1, c(k_x, k_z) = 2 \sin\left(\frac{k_x - 2}{2}\right)$  とした．

- $-2 < m < 0$  のとき  $k_z = 0$  で交差する表面状態を持つ．
- $0 < m < 2$  のとき  $k_z = \pi$  で交差する表面状態を持つ．
- 上記以外は自明相

である．

表面状態において  $k_x$  方向の分散を持たせるため、前節と同様の摂動項

$$V(k_x, k_z) = a(k_x, k_z)\tau_y \otimes \sigma_x + b(k_x, k_z)\tau_y \otimes \sigma_y \quad (73)$$

を加える．バルクのエネルギースペクトルは

$$E^2(k_x, k_y) = (m + \cos k_y)^2 + \sin^2 k_y + a^2(k_x, k_z) + b^2(k_x, k_z) \quad (74)$$

である．条件  $U_{2D}(k_x)H_{3D}(k_x, k_y, k_z)U_{2D}(k_x)^{-1} = H_{3D}(k_x, k_y, -k_z)$  より

$$(a(k_x, k_z) + ib(k_x, k_z))e^{-ik_x} = -a(k_x, -k_z) + ib(k_x, -k_z) \quad (75)$$

が従う．

$$c(k_x, k_z) = -i(a(k_x, k_z) + ib(k_x, k_z))e^{-ik_x/2} \quad (76)$$

と置くとこの条件は

$$\overline{c(k_x, k_z)} = c(k_x, -k_z), \quad c(k_x + 2\pi, k_z) = -c(k_x, k_z) \quad (77)$$

と同値である．バルクのエネルギースペクトルは

$$E^2(k_x, k_y) = (m + \cos k_y)^2 + \sin^2 k_y + |c(k_x, k_z)|^2 \quad (78)$$

である．今は  $N = 1$  を考えているので  $c(k_x)$  は唯の関数である．上の条件よりミラー面  $k_z = 0, \pi$  においては  $c(k_x, k_z = 0, \pi)$  は実関数であり  $k_x$  が  $2\pi$  だけシフトすると負号がつくという条件である．この条件を満たすような一様な  $c(k_x, k_z = 0, \pi) = \text{const} \neq 0$  は存在しない．この事実が表面状態の安定性に対応する．

端状態の計算例を図3, 図4に示す．

## 5 トポロジカル不変量

### 5.1 1次元系

対称性は

$$U(k_x)H(k_x)U(k_x)^{-1} = -H(k_x),$$

$$U(k_x) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (79)$$

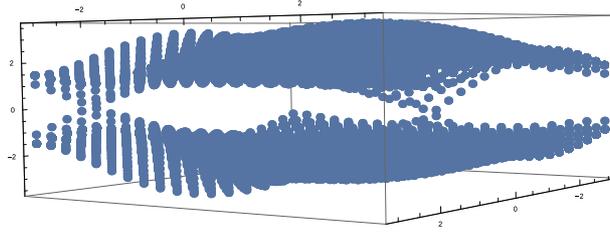


図4 端状態の計算例． $y$  方向を 10 サイトとした． $y = 0, 10$  の両端の表面状態を重ねて書いている． $m = 1, c(k_x, k_z) = 2 \sin\left(\frac{k_x - 2}{2}\right)$  とした．

これは周期的でない基底（つまり，局在位置を考慮した正しい基底）では以下と同値である．

$$\begin{aligned}\sigma_x H(k_x) \sigma_x &= -H(k_x), \\ \sigma_z H(k_x) \sigma_z &= H(k_x + 2\pi).\end{aligned}\tag{80}$$

以下周期的でない基底で考える． $\sigma_x H(k_x) \sigma_x = -H(k_x)$  より  $A(k_x), B(k_x)$  をエルミト行列として

$$H(k_x) = \begin{pmatrix} A(k_x) & iB(k_x) \\ -iB(k_x) & -A(k_x) \end{pmatrix}\tag{81}$$

とおける．この表示で  $\sigma_z H(k_x) \sigma_z = H(k_x + 2\pi)$  は

$$A(2\pi) + iB(2\pi) = A(0) - iB(0)\tag{82}$$

と同値である． $S^1$  に値を取る  $\theta(k_x)$  を

$$e^{i\theta(k_x)} := \det(A(k_x) + iB(k_x)) / |\det(A(k_x) + iB(k_x))|\tag{83}$$

を導入すると

$$e^{i\theta(2\pi)} = e^{-i\theta(0)}\tag{84}$$

が条件である． $\theta(k_x)$  が 0 を偶数回，あるいは奇数回横切るか，が  $Z_2$  不変量を与える．

## 5.2 2次元系

周期的でない物理的な基底で考えよう．対称性は以下である．

$$S_I : \begin{cases} \tau_z H(k_x, k_y) \tau_z = -H(k_x, k_y), \\ \tau_x \sigma_x H(k_x, k_y) \tau_x \sigma_x = H(k_x, k_y), \\ \sigma_z H(k_x, k_y) \sigma_z = H(k_x + 2\pi, k_y). \end{cases}\tag{85}$$

$\tau_z H(k_x, k_y) \tau_z = -H(k_x, k_y)$  より

$$H(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} 0 & V(k_x, k_y) \\ V(k_x, k_y)^\dagger & 0 \end{pmatrix}\tag{86}$$

とおける．さらに  $\tau_x \sigma_x H(k_x, k_y) \tau_x \sigma_x = H(k_x, k_y)$  より

$$\sigma_x V(k_x, k_y) \sigma_x = V^\dagger(k_x, k_y)\tag{87}$$

となる． $H(k_x, k_y)$  は flat 化されているものとする．このとき  $V(k_x, k_y)$  はユニタリ行列である．さて

$$\tilde{H}(k_x, k_y) := \sigma_x V(k_x, k_y)\tag{88}$$

を定義すると

$$\tilde{H}^2(k_x, k_y) = 1, \quad \tilde{H}(k_x, k_y)\tilde{H}^\dagger(k_x, k_y) = 1 \quad (89)$$

となる．よって  $\tilde{H}(k_x, k_y)$  は flat 化されたハミルトニアンである．境界条件に注意すると対称性  $S_I$  は以下と同値であることが分かる：

$$S_I : \sigma_z \tilde{H}(k_x, k_y) \sigma_z = -\tilde{H}(k_x + 2\pi, k_y) \quad (90)$$

ここでゲージ不変な U(1) ホロノミー

$$e^{i\gamma(k_x)} = \exp\left(-\oint dk_y \text{tr} A(k_x, k_y)\right) \quad (91)$$

を定義しよう．ここで  $A(k_x, k_y)$  は  $\tilde{H}(k_x, k_y)$  の占有状態の Berry 接続である．対称性  $\sigma_z \tilde{H}(k_x, k_y) \sigma_z = -\tilde{H}(k_x + 2\pi, k_y)$  より  $k_x = 0$  の非占有状態は  $k_x = 2\pi$  の占有状態に移る．占有状態と非占有状態の U(1) ホロノミーの積は自明であることに注意すると結局

$$e^{i\gamma(2\pi)} = e^{-i\gamma(0)} \quad (92)$$

となり前節と同じタイプの  $Z_2$  指数が定義できる．

### 5.3 3次元系

周期的でない物理的な基底を用いる．対称性は

$$\begin{aligned} \sigma_x H(k_x, k_y, k_z) \sigma_x &= H(k_x, k_y, -k_z), \\ \sigma_z H(0, k_y, k_z) \sigma_z &= H(2\pi, k_y, k_z). \end{aligned} \quad (93)$$

である． $k_x \in [0, 2\pi]$  とする．前者については glide 操作で内部自由度を変えるような変換  $\sigma_x \otimes U$  としても良いが後の議論は同様である．分類は

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \quad (94)$$

で与えられる． $\mathbb{Z}$  部分は  $k_z$  依存しない weak index であり Chern 数で与えられる． $\mathbb{Z}$  部分には興味はない．stable equivalence で  $\mathbb{Z} = 0$  と常に取って良いので必要とあらば  $\mathbb{Z} = 0$  と仮定する．(以下では  $\mathbb{Z} = 0$  を仮定せずに  $\mathbb{Z}_2$  指数が定義できたと思います．)

$k_z = \Gamma_i$  ( $i = 0, \pi$ ) では  $\sigma_x = \pm 1$  のセクターに分離する：

$$H(k_x, k_y, \Gamma_i) = H_+(k_x, k_y, \Gamma_i) \oplus H_-(k_x, k_y, \Gamma_i) \quad (95)$$

さらに捻れた境界条件  $\sigma_z H(0, k_y, k_z) \sigma_z = H(2\pi, k_y, k_z)$  より

$$H_+(2\pi, k_y, \Gamma_i) = H_-(0, k_y, \Gamma_i), \quad H_-(2\pi, k_y, \Gamma_i) = H_+(0, k_y, \Gamma_i) \quad (96)$$

である．

以下で用いるのは Stokes の定理である：

$$\frac{i}{2\pi} \ln \text{Hol}(\partial S) + \frac{i}{2\pi} \int_S \text{tr} F \equiv 0 \pmod{1}. \quad (97)$$

ここで  $\text{Hol}(\ell)$  はループ  $\ell$  に対する U(1) ホロノミーである．( $S$  上で単一のゲージが取れる場合は  $\text{Hol}(\partial S) = e^{-\oint_{\partial S} \text{tr} A}$  である．)

$k_z = \Gamma_i$  においては  $H_\pm(k_x, k_y, \Gamma_i)$  に応じて2つの U(1) ホロノミーが定義できる：

$$\text{Hol}_\pm(\ell) \quad (98)$$

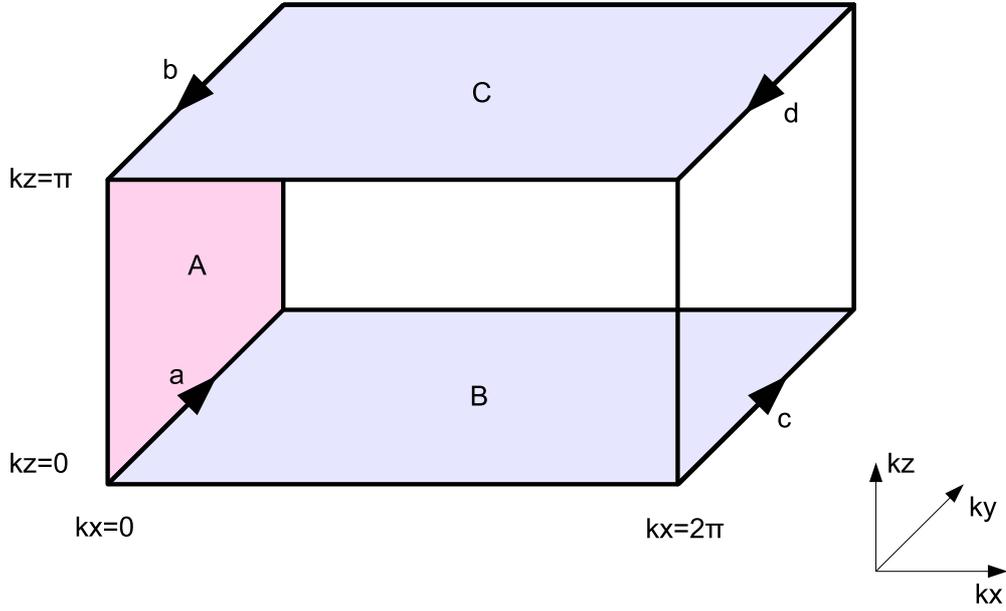


図 5

特に図 5 のループ  $a, b, c, d$  に対して，捻れた周期境界条件よりその  $U(1)$  ホロノミーについて

$$\begin{aligned} \text{Hol}_+(a) &= \text{Hol}_-(c), \\ \text{Hol}_+(b) &= \text{Hol}_-(d), \end{aligned} \quad (99)$$

が成立する．また，図 5 の閉曲面  $A, B, C$  において Stokes の定理を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \ln \text{Hol}(a+b) + \frac{i}{2\pi} \int_A \text{tr} F &\equiv 0 \pmod{1}, \\ \frac{i}{2\pi} \ln \text{Hol}_\pm(-a+c) + \frac{i}{2\pi} \int_B \text{tr} F_\pm &\equiv 0 \pmod{1}, \\ \frac{i}{2\pi} \ln \text{Hol}_\pm(b-d) + \frac{i}{2\pi} \int_C \text{tr} F_\pm &\equiv 0 \pmod{1}, \end{aligned} \quad (100)$$

である．ここで

$$\begin{aligned} \ln \text{Hol}(a+b) &= \ln \text{Hol}_+(a+b) + \ln \text{Hol}_-(a+b), \\ \ln \text{Hol}(c+d) &= \ln \text{Hol}_+(c+d) + \ln \text{Hol}_-(c+d) \end{aligned} \quad (101)$$

である．

以下の量を考える：

$$N := \frac{i}{2\pi} \ln \text{Hol}_+(a+b) + \frac{1}{2} \frac{i}{2\pi} \int_A \text{tr} F + \frac{1}{2} \frac{i}{2\pi} \int_B \text{tr} F_- - \frac{1}{2} \frac{i}{2\pi} \int_C \text{tr} F_- \pmod{1}. \quad (102)$$

この量を2倍すると

$$\begin{aligned}
2N &\equiv \frac{i}{2\pi} \ln \text{Hol}_+(a+b) + \frac{i}{2\pi} \ln \text{Hol}_-(c+d) + \frac{i}{2\pi} \int_A \text{tr} F + \frac{i}{2\pi} \int_B \text{tr} F_- - \frac{i}{2\pi} \int_C \text{tr} F_- \\
&\equiv \frac{i}{2\pi} \ln \text{Hol}_+(a+b) + \frac{i}{2\pi} \ln \text{Hol}_-(a+b) + \frac{i}{2\pi} \int_A \text{tr} F \\
&\equiv \frac{i}{2\pi} \ln \text{Hol}(a+b) + \frac{i}{2\pi} \int_A \text{tr} F \\
&\equiv 0 \pmod{1}.
\end{aligned} \tag{103}$$

となる．ここで Stokes の定理を用いた．よって  $N$  は  $\mathbb{Z}_2$  不変量である．

## 6 $K$ 理論より

### 6.1 低次元への分解

ハミルトニアン次元を上げる操作は以下の Gysin 完全系列 (の特別な場合) によって正当化できる<sup>\*3</sup> :

$$\begin{array}{ccccc}
K_G^{\pi^*(\tau+\tau(\rho))-1}(X \times S^1) & \xleftarrow{\pi^*} & K_G^{\tau+\tau(\rho)-1}(X) & \xleftarrow{\chi_G(\rho)} & K_G^{\tau-1}(X) \\
\downarrow & & & & \uparrow \\
K_G^{\tau+0}(X) & \xrightarrow{\chi_G(\rho)} & K_G^{\tau+\tau(\rho)+0}(X) & \xrightarrow{\pi^*} & K_G^{\pi^*(\tau+\tau(\rho))+0}(X \times S^1)
\end{array} \tag{104}$$

ここで  $\tau \in H_G^1(X; \mathbb{Z}_2) \times H_G^3(X; \mathbb{Z})$  はねじれ,  $\pi : X \times S^1 \rightarrow X$  は第1成分への射影である.  $\tau(\rho) \in H_G^1(pt; \mathbb{Z}_2) \times H_G^3(pt; \mathbb{Z})$  は  $G$  の円周  $S^1$  への作用によって決まり, ねじれを補正する. (例えば,  $\mathbb{Z}_2$  が  $S^1$  に自明に作用する:  $z \rightarrow z$  か, あるいは“鏡映”で作用する:  $z \rightarrow \bar{z}$  によって次元を上げ下げしたときの対称性クラスが変化するが,  $\tau(\rho)$  はこの対称性の変化を指定する.)

$G$  の  $S^1$  への作用が固定点  $pt \in S^1$  を持つ場合は ( $X$  上に固定点が存在しなくても良い!),  $s : X \rightarrow X \times S^1$  を  $s(x) = (x, pt)$  で定めると,  $s$  は  $G$  同変写像であり  $\pi \circ s = 1$  より  $s^* \circ \pi^* = 1$  を満たす. よって上記の完全系列は分裂する短完全系列

$$0 \longrightarrow K_G^{\tau+\tau(\rho)+n}(X) \xrightarrow{\pi^*} K_G^{\pi^*(\tau+\tau(\rho))+n}(X \times S^1) \longrightarrow K_G^{\tau+n-1}(X) \longrightarrow 0 \tag{105}$$

に分解する. よって

$$K_G^{\pi^*(\tau+\tau(\rho))+n}(X \times S^1) \cong K_G^{\tau+\tau(\rho)+n}(X) \oplus K_G^{\tau+n-1}(X) \tag{106}$$

となる. あるいは  $\tau(\rho)$  のねじれの補正を予め差っ引いて

$$K_G^{\pi^*\tau+n}(X \times S^1) \cong K_G^{\tau+n}(X) \oplus K_G^{\tau-\tau(\rho)+n-1}(X) \tag{107}$$

となる. この分解を繰り返しトーラスの次元を限界まで下げると  $K$  群の計算が楽になる.

#### 6.1.1 3次元 pg

次に  $G = \mathbb{Z}_2$  の場合を考える. このとき  $\mathbb{Z}_2$  の  $S^1$  への作用で固定点が存在するのは (i) 自明に作用する, (ii) “鏡映”で作用する, の2通りである.  $H_{\mathbb{Z}_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ ,  $H_{\mathbb{Z}_2}^3(pt; \mathbb{Z}) = 0$  なので可能な捩れの補正  $\tau(\rho)$  は2通りある. この非自明元を  $t$  と書く.  $2t = 0$  である.  $\mathbb{Z}_2$  の  $S^1$  への作用が自明な場合が0に, “鏡映”の場合が  $t$  に対応する. もとの捩れ  $\tau$  に  $t \in H_{\mathbb{Z}_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2)$  を加えることは,  $n = 0, 1$  のそれぞれの対称性クラスに応じて以下の役割を果たす:

- $n = 0$  (class A) のとき  $\mathbb{Z}_2$  対称性が“対称性”か“反対称性”かを入れ替える.
- $n = 1$  (class AIII) のとき  $\mathbb{Z}_2$  対称性がカイラル対称性  $\Gamma$  と可換か反可換かを入れ替える.

<sup>\*3</sup> 本節は五味さんのノート [3] の結果を自由に用いる.

次に3次元トーラスに  $\mathbb{Z}_2$  対称性が pg で作用する場合の  $K$  群を上記の分解を用いて計算しよう．3次元の pg の対称性は以下である：

$$U(k_x)H(k_x, k_y, k_z)U(k_x)^{-1} = H(k_x, k_y, -k_z), \quad U(k_x) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (108)$$

対応する  $K$  群を

$$K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta_{\text{pg}}}(\tilde{T}_{\text{pg}}^3) \quad (109)$$

と書く． $\mathbb{Z}_2 : (k_x, k_y, k_z) \mapsto (k_x, k_y, -k_z)$  と作用しており，ねじれ  $\zeta_{\text{pg}}$  は  $k_x$  方向の円  $S_x^1$  における非自明なねじれ  $H_{\mathbb{Z}_2}^1(S_x) = \mathbb{Z}_2$  を表している． $k_z$  方向の  $\tilde{S}_z^1$  について上記の分解を適用すると

$$K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta_{\text{pg}}}(\tilde{T}_{\text{pg}}^3) \cong K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta}(T^2) \oplus K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta-t-1}(T^2) \quad (110)$$

となる．右辺において  $\mathbb{Z}_2$  は  $T^2$  に自明に作用している．第1項は“weak index”でありハミルトニアンで書くと

$$U(k_x)H(k_x, k_y)U(k_x)^{-1} = H(k_x, k_y), \quad U(k_x) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (111)$$

で与えられる． $K$  群は  $K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta}(T^2) \cong \mathbb{Z}$  であり，トポロジカル不変量は第1 Chern 数で与えられる．第2項は次数が  $(-1)$  だけ変化しているのでカイラル対称性が存在する class AIII に移っている．さらに  $t$  によりカイラル対称性と  $\mathbb{Z}_2$  対称性が反可換となっている．ハミルトニアンで書くと

$$\begin{aligned} \Gamma H(k_x, k_y)\Gamma^{-1} &= -H(k_x, k_y), \\ U(k_x)H(k_x, k_y)U(k_x)^{-1} &= H(k_x, k_y), \quad U^2(k_x) = e^{-ik_x}, \\ \Gamma U(k_x) &= -U(k_x)\Gamma, \end{aligned} \quad (112)$$

である．

第1項と第2項は  $k_y$  方向の円  $S_y^1$  についてさらに次元を下げるのが可能である．今，特に興味があるのは第2項である．分解は

$$K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta-t-1}(T^2) \cong K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta-t-1}(S_x^1) \oplus K_{\mathbb{Z}_2}^{\zeta-t}(S_x^1) \quad (113)$$

第1項は“weak index”である．第2項は  $t$  の存在により  $\mathbb{Z}_2$  の“反対称性”を表す．ハミルトニアンで書くと

$$U(k_x)H(k_x)U(k_x)^{-1} = -H(k_x), \quad U(k_x) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (114)$$

となる．このような1次元系の対称性クラスが  $\mathbb{Z}_2$  の分類を示すことは1節で調べた．

### 6.1.2 3次元 pmg

3次元の pmg は以下のような  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  対称性を持つ：

$$\begin{aligned} U(k_x)H(k_x, k_y, k_z)U(k_x)^{-1} &= H(k_x, k_y, -k_z), \quad U(k_x) = e^{-ik_x}, \\ MH(k_x, k_y, k_z)M^{-1} &= H(-k_x, k_y, k_z), \\ MU(k_x) &= U(k_x)M. \end{aligned} \quad (115)$$

この場合も  $k_y, k_z$  のトーラス部分に対して次元を下げるのが可能である．

$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  に対する捩れの補正  $\tau(\rho) = H_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2) \times H_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^3(pt; \mathbb{Z})$  において

$$H_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad (116)$$

$$H_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^3(pt; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \quad (117)$$

で与えられる． $H_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  の非自明元をそれぞれ  $t_1, t_2$ ,  $2t_1 = 2t_2 = 0$  とする． $t_1$  は  $U(k_x)$  対称性に， $t_2$  は  $M$  対称性にそれぞれ対応するものとする． $H_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^3(pt; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$  の非自明元を  $t_{12}$  ( $2t_{12} = 0$ ) と書く． $t_1, t_2$  の意味は前節の  $t$  と同様である：

- $n = 0$ (class A) のとき,  $t_1(t_2)$  は  $U(k_x)$  対称性 ( $M$  対称性) が “対称性” が “反対称性” を入れ替える .
- $n = 1$ (class AIII) のとき,  $t_1(t_2)$  は  $U(k_x)$  対称性 ( $M$  対称性) がカイラル対称性  $\Gamma$  と可換か反可換かを入れ替える .

今回新たに加わった  $t_{12}$  は 2 つの  $\mathbb{Z}_2$  対称性の積を射影表現的に変える . つまり

- $t_{12}$  は  $MU(k_x) = U(k_x)M$  の関係を  $MU(k_x) = -U(k_x)M$  と内部自由度の変換から来る非自明な位相因子 (-1) を付ける .

ここで  $H_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2) \times H_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^3(pt; \mathbb{Z})$  の和の構造に注意する . 一般に  $\tau_i = (w_i, h_i) \in H_G^1(X; \mathbb{Z}_2) \times H_G^3(X; \mathbb{Z})$  について

$$\tau_1 + \tau_2 = (w_1 + w_2, h_1 + h_2 + \beta(w_1 \cup w_2)) \quad (118)$$

である . ただし  $\cup : H_G^1(X; \mathbb{Z}_2) \times H_G^1(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_G^2(X; \mathbb{Z}_2)$  はカップ積で,  $\beta : H_G^2(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_G^3(X; \mathbb{Z})$  は係数の完全系列  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  が誘導する連結準同型である .  $H_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2) \times H_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^3(pt; \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$  の場合に  $\beta$  の部分が現れるのは

$$\beta(t_1 \cup t_2) = \beta(t_2 \cup t_1) = t_{12} \quad (119)$$

に限る .

ではトーラスの次元を下げよう . まず  $k_z$  について次元を下げると

$$K_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^\zeta(T^3) \cong K_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^\zeta(T^2) \oplus K_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^{\zeta-t_1-1}(T^2) \quad (120)$$

である . 前者は “weak index” であり , “strong index” の後者に興味がある . 後者の  $K$  群  $K_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^{\zeta-t_1-1}(T^2)$  は以下のような対称性を表す :

$$\begin{aligned} \Gamma H(k_x, k_y) \Gamma^{-1} &= -H(k_x, k_y), \\ U(k_x) H(k_x, k_y) U(k_x)^{-1} &= H(k_x, k_y), \quad U(k_x) = e^{-ik_x}, \quad U(k_x) \Gamma = -\Gamma U(k_x), \\ MH(k_x, k_y) M^{-1} &= H(-k_x, k_y), \quad M \Gamma = \Gamma M, \\ MU(k_x) &= U(k_x) M. \end{aligned} \quad (121)$$

さらに  $k_y$  方向の次元を下げる .

$$K_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^{\zeta-t_1-1}(T^2) \cong K_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^{\zeta-t_1-1}(S^1) \oplus K_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^{\zeta-t_1}(S^1) \quad (122)$$

ここで後者の  $K$  群  $K_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^{\zeta-t_1}(S^1)$  をハミルトニアンで表すと以下ようになる :

$$\begin{aligned} U(k_x) H(k_x) U(k_x)^{-1} &= -H(k_x), \quad U(k_x) = e^{-ik_x}, \\ MH(k_x) M^{-1} &= H(-k_x), \\ MU(k_x) &= U(k_x) M. \end{aligned} \quad (123)$$

この 1 次元系が  $\mathbb{Z}$  の分類を示すことが以下で示そう . 一般性を失わずに

$$U(k_x) = \tau_0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_\sigma, \quad (124)$$

$$M = \tau_z \otimes \sigma_0 \quad (125)$$

とよい . 1 節の議論より ,  $U(k_x)$  の対称性からハミルトニアンは以下のおくことができる :

$$\begin{aligned} H(k_x) &= \begin{pmatrix} H_{AA}(k_x) & -iH_{AB}(k_x)e^{-ik_x/2} \\ iH_{AB}(k_x)e^{ik_x/2} & -H_{AA}(k_x) \end{pmatrix}, \\ H_{AA}^\dagger(k_x) &= H_{AA}(k_x), \quad H_{AB}^\dagger(k_x) = H_{AB}(k_x), \\ H_{AA}(k_x + 2\pi) &= H_{AA}(k_x), \quad H_{AB}(k_x + 2\pi) = -H_{AB}(k_x). \end{aligned} \quad (126)$$

ここで  $\dagger$  はエルミト共役である．さらに  $M$  の対称性より

$$\tau_z H_{AA}(k_x) \tau_z = H_{AA}(-k_x), \quad \tau_z H_{AB}(k_x) \tau_z = H_{AB}(-k_x) \quad (127)$$

である．ユニタリ行列

$$V(k_x) := H_{AA}(k_x) + iH_{AB}(k_x), \quad V(k_x + 2\pi) = V^\dagger(k_x) \quad (128)$$

を導入すると  $M$  の対称性は

$$\tau_z V(k_x) \tau_z = V(-k_x) \quad (129)$$

となる．対称性より独立な  $V(k_x)$  の自由度を  $k_x \in [0, \pi]$  に取れる．このとき  $k_x = 0, \pi$  でのみ  $V(k_x)$  に制限が課される：

$$\tau_z V(0) \tau_z = V(0), \quad (130)$$

$$\tau_z V(\pi) \tau_z = V^\dagger(\pi). \quad (131)$$

前者はユニタリ行列  $V(0)$  に非自明な条件を与えない．後者は  $\tau_z V(\pi)$  がユニタリ行列で  $(\tau_z V(\pi))^2 = 1$  に注意すると  $\tau_z V(\pi)$  は (flat 化された) ハミルトニアンと同一である．よって  $\tau_z V(\pi)$  は  $\mathbb{Z}$  の分類を示し，よって

$$K_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^{\zeta - t_1}(S^1) \cong \mathbb{Z} \quad (132)$$

が分かる．

## 6.2 次元を上げるときのハミルトニアンの Map について

ここでは  $G$  の作用が  $S^1$  において固定点をもつ場合の関係：

$$K_G^{\pi^*(\tau+\tau(\rho))+n-1}(X \times S^1) \cong K_G^{\tau+\tau(\rho)+n-1}(X) \oplus K_G^{\tau+n}(X) \quad (133)$$

において， $K_G^{\tau+n}(X)$  に属する  $X$  上のハミルトニアン  $H(x)$  から  $K_G^{\pi^*(\tau+\tau(\rho))+n-1}(X \times S^1)$  に属する  $X \times S^1$  上のハミルトニアン  $\tilde{H}(x, \theta)$  を構成する方法について考える． $K_G^{\tau+n}(X)$  から見たときには  $S^1$  への  $G$  の作用を選ぶことができる．以下では簡単のため

- $G$  の  $S^1$  への作用が自明な場合，
- $G$  が部分群  $\mathbb{Z}_2$  を含み，その  $\mathbb{Z}_2$  の  $S^1$  への作用が“鏡映”の場合のみを考える．

両者の場合で，ハミルトニアンの Map のされ方は同一である．異なる部分は対称性をどのように Map するかである．

ハミルトニアンの Map は経験的には次のようにとれば良いことが知られている． $H_1(x)$  をアーベル群  $K_G^{\tau+n}(X)$  の生成子を記述するハミルトニアンとする． $H_0(x)$  を  $K_G^{\tau+n}(X)$  の自明元を記述するハミルトニアンとする．このとき  $K_G^{\pi^*(\tau+\tau(\rho))+n-1}(X \times S^1)$  に属する  $X \times S^1$  上のハミルトニアンは  $H_0(x)$  と  $H_1(x)$  をカイラル演算子を用いて“輪っかにして繋ぐ”ことによって得られる．

具体的に式で書く．まず  $n = -1$  (class AIII) の場合を考える．このとき  $K_G^{\tau-1}(X)$  に属するハミルトニアンはカイラル対称性

$$\Gamma H(x) \Gamma^{-1} = -H(x) \quad (134)$$

を有する．このカイラル演算子  $\Gamma$  を用いて  $K_G^{\pi^*(\tau+\tau(\rho))}(X \times S^1)$  に属する (つまり，カイラル対称性が存在しない)  $X \times S^1$  上のハミルトニアンが

$$\tilde{H}(x, \theta) = f_1(\theta)H_1(x) + f_2(\theta)H_0(x) + g(\theta)\Gamma, \quad (\theta \in S^1) \quad (135)$$

として構成できる．ここで  $f_1(\theta), f_2(\theta), g(\theta)$  は  $f_1(\theta) \geq 0, f_2(\theta) \geq 0, f_1(\theta)$  は  $\theta = 0$  近傍で値をもち， $f_2(\theta)$  は  $\theta = \pi$  近傍で値をもち， $g(\theta)$  は  $\theta = \pm\pi/2$  近傍で値をもち， $g(\theta \sim \pi/2)$  と  $g(\theta \sim -\pi/2)$  の負号を反対に取る．(図6参照) さらに  $\mathbb{Z}_2 \subset G$  が  $S^1$  に“鏡映”で作用する場合にも適用するために以下の条件を課す：

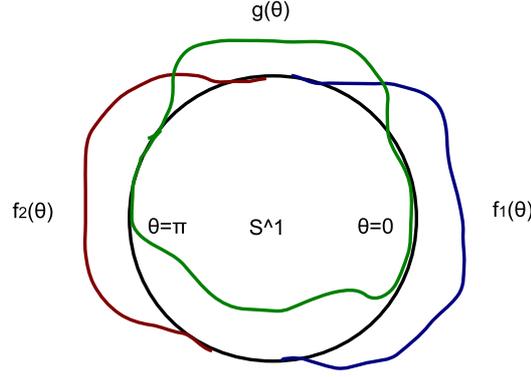


図 6

$$\begin{aligned}
 f_1(-\theta) &= f_1(\theta), \\
 f_2(-\theta) &= f_2(\theta), \\
 g(-\theta) &= -g(\theta).
 \end{aligned} \tag{136}$$

このように取ると

$$\tilde{H}(x, -\theta) = f_1(\theta)H_1(x) + f_2(\theta)H_0(x) - g(\theta)\Gamma \tag{137}$$

となることに注意 .

さて対称性がどのように Map されるか , つまり  $\tau(\rho)$  について考えよう .  $G$  が  $S^1$  に自明に作用する場合は Map された対称性は以下ようになる .

$$\tilde{U}(g, x)\tilde{H}(x, \theta)\tilde{U}(g, x)^{-1} = \begin{cases} \tilde{H}(x, \theta) & (\tilde{U}(g, x) = U(g, x), \text{ for } U(g, x)\Gamma = -\Gamma U(g, x)) \\ -\tilde{H}(x, \theta) & (\tilde{U}(g, x) = \Gamma U(g, x), \text{ for } U(g, x)\Gamma = \Gamma U(g, x)) \end{cases} \tag{138}$$

これは元の対称性のねじれの情報を引き継ぐことを意味する . つまり  $\tau(\rho) = 0$  である .  $G$  の部分群  $\mathbb{Z}_2$  が  $S^1$  に “鏡映” で作用する場合は ,  $\mathbb{Z}_2$  に対応する対称性を  $U_{\mathbb{Z}_2}(x)$  とすると

$$\tilde{U}_{\mathbb{Z}_2}(x)\tilde{H}(x, \theta)\tilde{U}_{\mathbb{Z}_2}(x)^{-1} = \begin{cases} \tilde{H}(x, -\theta) & (\tilde{U}_{\mathbb{Z}_2}(x) = U_{\mathbb{Z}_2}(x), \text{ for } U_{\mathbb{Z}_2}(x)\Gamma = \Gamma U_{\mathbb{Z}_2}(x)) \\ -\tilde{H}(x, -\theta) & (\tilde{U}_{\mathbb{Z}_2}(x) = \Gamma U_{\mathbb{Z}_2}(x), \text{ for } U_{\mathbb{Z}_2}(x)\Gamma = -\Gamma U_{\mathbb{Z}_2}(x)) \end{cases} \tag{139}$$

となる . これは  $+\tau(\rho)$  として ,  $\mathbb{Z}_2 \subset G$  に対応する  $H_{\mathbb{Z}_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  部分の非自明元  $t$  を足すことを意味する .

次に  $n = 0$  (class A) の場合を考える . このとき  $K_G^0(X)$  に属するハミルトニアンはカイラル対称性を持たない . このとき  $K_G^{\pi^*(\tau+\tau(\rho))^{-1}}(X \times S^1)$  に属する (つまり , カイラル対称性を有する)  $X \times S^1$  上のハミルトニアンが

$$\tilde{H}(x, t) = f_1(\theta)H_1(x) \otimes \sigma_z + f_2(\theta)H_0(x) \otimes \sigma_z + g(\theta)\sigma_x, \quad (\theta \in S^1) \tag{140}$$

として構成できる . ここで  $f_1(\theta), f_2(\theta), g(\theta)$  は以前と同じものである . また  $\sigma_\mu (\mu = 0, x, y, z)$  はパウリ行列である . パウリ行列  $\sigma_y$  が余っているので , Map されたハミルトニアンはカイラル対称性

$$\Gamma\tilde{H}(x, \theta)\Gamma^{-1} = \tilde{H}(x, \theta), \quad \Gamma = \sigma_y \tag{141}$$

を有する (つまり , 次数  $n = -1$  のハミルトニアンである) ことに注意 .

さて対称性がどのように Map されるか , つまり  $\tau(\rho)$  について考えよう .  $G$  が  $S^1$  に自明に作用する場合は Map された対称性は以下ようになる .

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}(g, x)\tilde{H}(x, \theta)\tilde{U}(g, x)^{-1} &= \tilde{H}(x, \theta), \\
 \tilde{U}(g, x)\Gamma &= \begin{cases} \Gamma\tilde{U}(g, x) & (\tilde{U}(g, x) = U(g, x) \otimes \sigma_0, \text{ for } U(g, x)H(x)U(g, x)^{-1} = H(x)) \\ -\Gamma\tilde{U}(g, x) & (\tilde{U}(g, x) = U(g, x) \otimes \sigma_x, \text{ for } U(g, x)H(x)U(g, x)^{-1} = -H(x)) \end{cases} \end{aligned} \tag{142}$$

これは元の対称性のねじれの情報を引き継ぐことを意味する．つまり  $\tau(\rho) = 0$  である． $G$  の部分群  $\mathbb{Z}_2$  が  $S^1$  に“鏡映”で作用する場合は， $\mathbb{Z}_2$  に対応する対称性を  $U_{\mathbb{Z}_2}(x)$  とすると

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\mathbb{Z}_2}(x)\tilde{H}(x,\theta)\tilde{U}_{\mathbb{Z}_2}(x)^{-1} &= \tilde{H}(x,-\theta), \\ \tilde{U}_{\mathbb{Z}_2}(x)\Gamma &= \begin{cases} -\Gamma\tilde{U}_{\mathbb{Z}_2}(x) & (\tilde{U}_{\mathbb{Z}_2}(x) = U_{\mathbb{Z}_2}(x) \otimes \sigma_z, \text{ for } U_{\mathbb{Z}_2}(x)H(x)U_{\mathbb{Z}_2}(x)^{-1} = H(x)) \\ \Gamma\tilde{U}_{\mathbb{Z}_2}(x) & (\tilde{U}_{\mathbb{Z}_2}(x) = U_{\mathbb{Z}_2}(x) \otimes \sigma_y, \text{ for } U_{\mathbb{Z}_2}(x)H(x)U_{\mathbb{Z}_2}(x)^{-1} = -H(x)) \end{cases} \end{aligned} \quad (143)$$

となる．これは  $+\tau(\rho)$  として， $\mathbb{Z}_2 \subset G$  に対応する  $H_{\mathbb{Z}_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  部分の非自明元  $t$  を足すことを意味する．

## 参考文献

- [1] 五味清紀, 2次元空間群作用で同変なトーラスの  $K$  理論: pm, pg ,cm.
- [2] 五味清紀, トーラスの  $K$  理論への分解 (ver.2)
- [3] 五味清紀, 球面とトーラスの同変  $K$  理論の計算方法