$\mathbb{Z}$加群の準同型の計算について

塩崎　謙

February 12, 2023

1　$\operatorname{Im} f, \operatorname{Ker} f$の計算

A, Bを$\mathbb{Z}$加群とする．準同型

$$f : A \to B \tag{1}$$

に対して，$\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$を計算したい．

まず，A, Bをねじれのない群の商として，それぞれ$A = \tilde{A}/P_A, B = \tilde{B}/P_B$と表す．以下が可換図式となるように，$\tilde{f}$をひとつ定める．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_A & \longrightarrow & \tilde{A} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \tilde{f}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \tilde{f}}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P_B & \longrightarrow & \tilde{B} & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2}$$

右側の可換性

$$\tilde{f}(\tilde{a} \in \tilde{A}) \bmod P_B = f(\tilde{a} \bmod P_A), \tag{3}$$

を仮定すると，

$$\tilde{f}(P_A) \bmod P_B = f(P_A \bmod P_A) = f(0) = 0 \tag{4}$$

より，

$$\tilde{f}(P_A) \subset P_B, \tag{5}$$

つまり左側の可換性が導かれるので，右側の可換性のみ示せば良い．

リフト$\tilde{f}$の選び方はP_Bの任意性があることに注意.

リフト$\tilde{f}$は，例えば，A, Bの基底とfの行列表示が与えられている場合は，以下のように構成できる． A, Bの基底をそれぞれ$(a_1, \dots, a_N), (b_1, \dots, b_M)$としｈ，$f$の行列表示を

$$f(a_1, \dots, a_N) = (b_1, \dots, b_M) M_f \tag{6}$$

とする．このとき，b_iが$q_i b_i = 0$なるねじれ元の場合に，行列M_fは第i行は$\mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z}$値であることに注意. 行列M_fの，$\mathbb{Z}$値行列へのリフト$\tilde{M}_f$をひとつ取り，$\tilde{A}, \tilde{B}$の基底をそれぞれ$(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N), (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_M)$として，$\tilde{f}$を

$$\tilde{f}(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N) := (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_M) \tilde{M}_f \tag{7}$$

と定める．すると，

$$\tilde{f}(\sum_j n_j \tilde{a}_j) \bmod P_B = \sum_j n_j \tilde{f}(\tilde{a}_j) \bmod P_B = \sum_j n_j \sum_i \tilde{b}_i [\tilde{M}_f]_{ij} \bmod P_B \tag{8}$$

$$= \sum_j n_j \sum_i b_i [M_f]_{ij} = \sum_j n_j f(a_j) = f(\sum_j n_j a_j) \tag{9}$$

図式の右側の可換性が従う．

1.1 $\mathrm{Im}\, f$

$$\mathrm{Im}\, f = f(A) = \tilde{f}(\tilde{A}) \bmod P_B \tag{10}$$

であるが，これは商群としては

$$= \tilde{f}(\tilde{A})/(\tilde{f}(\tilde{A}) \cap P_B) \tag{11}$$

であり，さらに第 2 同型定理より，以下を得る．

$$\mathrm{Im}\, f = (\tilde{f}(\tilde{A}) + P_B)/P_B. \tag{12}$$

ここで，

$$\tilde{f}(\tilde{A}) + P_B = \{x + y \in \tilde{B} | x \in \tilde{f}(\tilde{A}), y \in P_B\} \tag{13}$$

である．

$\mathrm{Im}\, f$の計算においてAのねじれ元の情報は可能なfに制限を与えるものの，$\tilde{f}(\tilde{A}) + P_B$の計算には影響しないことに注意しよう． $\mathrm{Im}\, f$の生成元$f(a_i)$は，a_iが$\mathbb{Z}$なのかねじれ元なのかに依存せずに決まる．

1.2 $\mathrm{Ker}\, f$

$$\mathrm{Ker}\, f = \{a \in A | f(a) = 0\} = \{\tilde{a} \in \tilde{A} | \tilde{f}(\tilde{a}) \in P_B\} \bmod P_A = \tilde{f}^{-1}(P_B) \bmod P_A \tag{14}$$

である． $\tilde{f}(P_A) \subset P_B$に注意すると，$P_A \subset \tilde{f}^{-1}(P_B)$であり，

$$= \tilde{f}^{-1}(P_B)/P_A \tag{15}$$

である．分子は

$$\tilde{f}^{-1}(P_B) = \{\tilde{a} \in \tilde{A} | \tilde{f}(\tilde{a}) \in P_B\} = \{\tilde{a} \in \tilde{A} | {}^{\exists}\tilde{b} \in P_B,\ \text{s.t.}\ \tilde{f}(\tilde{a}) + \tilde{b} = 0\} \tag{16}$$

であるので，準同型写像

$$\tilde{f} \oplus \mathrm{Id}_{P_B} : \tilde{A} \oplus P_B \to \tilde{B}, \quad (\tilde{a}, \tilde{b}) \mapsto \tilde{f}(\tilde{a}) + \tilde{b} \tag{17}$$

を導入すると，

$$\{\tilde{a} \in \tilde{A} | \tilde{f}(\tilde{a}) \subset P_B\} = \mathrm{Ker}\,(\tilde{f} \oplus \mathrm{Id}_{P_B})|_{\tilde{A}}. \tag{18}$$

と計算できる．ここで，$\mathrm{Ker}\,(\tilde{f} \oplus \mathrm{Id}_{P_B})|_{\tilde{A}}$は$\mathrm{Ker}\,(\tilde{f} \oplus \mathrm{Id}_{P_B})$の$\tilde{A}$への射影である．結局，以下を得た．

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\,(\tilde{f} \oplus \mathrm{Id}_{P_B})|_{\tilde{A}}/P_A. \tag{19}$$

1.3 応用例：$\mathrm{Ker}\,/\mathrm{Im}$ の計算

$\mathbb{Z}$加群の準同型の列

$$A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C \tag{20}$$

において，$\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$が満たされているとき，商群$\mathrm{Ker}\, g/\mathrm{Im}\, f$が定義される．可換図式

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_A \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & \tilde{A} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_B \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & \tilde{B} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_C \arrow[r] & \tilde{C} \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\tag{21}
$$

を考える．既に示したように，f, gを適当な基底で行列表示して，$\mathbb{Z}$値行列とみなすことで，可換な$\tilde{f}, \tilde{g}$が得られる．

@@@

上記の公式を用いると，

$$
\mathrm{Ker}\, g/\mathrm{Im}\, f = \frac{\mathrm{Ker}\,(\tilde{g} \oplus \mathrm{Id}_{P_C})|_{\tilde{B}}/P_B}{(\tilde{f}(\tilde{A}) + P_B)/P_B} \tag{22}
$$

となるが，第3同型定理を用いると，

$$
\mathrm{Ker}\, g/\mathrm{Im}\, f = \frac{\mathrm{Ker}\,(\tilde{g} \oplus \mathrm{Id}_{P_C})|_{\tilde{B}}}{\tilde{f}(\tilde{A}) + P_B}, \tag{23}
$$

あるいは，

$$
\mathrm{Ker}\, g/\mathrm{Im}\, f = \frac{\tilde{g}^{-1}(P_C)}{\tilde{f}(\tilde{A}) + P_B}, \tag{24}
$$

となり，$\tilde{B}$の2つの部分群の商群の計算に帰着する．ねじれのない可換群の間の商群であるので，$\tilde{f}(\tilde{A}) + P_B$の基底を$\mathrm{Ker}\,(\tilde{g} \oplus \mathrm{Id}_{P_C})|_{\tilde{B}}$の基底を用いて展開して（擬似逆行列を用いる），展開行列をスミス分解することにより計算される．

$\tilde{f}(\tilde{A}) + P_B \subset \tilde{g}^{-1}(P_C)$を直接確認しておくと

$$
\tilde{g}(\tilde{f}(\tilde{a}) + b \in P_B) = \tilde{g} \circ \tilde{f}(\tilde{a}) + \tilde{g}(b \in P_B) \tag{25}
$$

であるが，$g \circ f = 0$よりと図式の可換性より$\tilde{g} \circ \tilde{f}(\tilde{A}) \subset P_C$．また，図式の可換性より$\tilde{g}(P_B) \subset P_C$より．