

ノート：1次元 frustration free 系の面積則

塩崎 謙

July 24, 2024

Abstract

ギャップのある1次元 frustration free 系における、エンタングルメント・エントロピーの面積則の証明を追う。

1 はじめに

局所Hilbert空間の次元が有限であるような1次元量子多体系において、ギャップ系、つまり基底状態と第一励起状態の間に有限のエネルギーギャップがあれば、von-Neumann エンタングルメント・エントロピーが面積則に従う、つまり、系のサイズに依存しない定数で上から抑えられる。局所Hilbert空間の次元を d 、スペクトルギャップを ϵ とする。現在まで知られている結果は以下¹。

- Lieb=Robinson限界を用いた証明 [1]²。

$$S \leq \exp \left[O\left(\frac{\log d}{\epsilon}\right) \right]. \quad (1.1)$$

- Approximate Ground Space Projection (AGSP) を用いる証明 [6]。

$$S \leq O\left(\frac{\log^3 d}{\epsilon}\right). \quad (1.2)$$

- Frustration freeな系において、AGSPを用いた結果は [6]

$$S \leq O\left(\left(\frac{\log d}{\epsilon}\right)^3\right) \quad (1.3)$$

“Frustration free”は、局所ハミルトニアンが k -localであることを含意するものとする。Frustration free系における境界は、本ノートで詳しく証明を追う ditectability lemma [2, 3] と diluting lemma [3, 5]を組み合わせることで得られる。Ditectability lemmaとは、frustration free系においては、局所射影の積で構成されるある演算子 A が存在して、任意の状態を基底状態に近づける役割を果たす。Diluting lemmaはSchmidtランクの増大を抑えるように A を再定義できることを保証する。一般のfrustrated系におけるAGSPは、局所ハミルトニアンによって A が構成される。その後の発展を眺めると、AGSPは応用が多く、有用な計算ツールのようなだ。AGSPの理解を目指して、本ノートではfrustration free系における ditectability lemma と diluting lemmaの証明を追う。結果として[5]で証明された面積則は

$$S \leq O\left(\left(\frac{\log d}{\epsilon}\right)^3 \log^8\left(\frac{\log d}{\epsilon}\right)\right) \quad (1.4)$$

¹基底状態の縮退の有無を許容するか否かについて、確認する。

²Hastingsの原論文[1]の式を追おうとしたが、挫折した。[8]に無限系における設定も含んだ詳細が書かれてある。

である.

Frustration free条件であるが, 一般次元において, 実はギャップがあれば常に frustration free もどきにハミルトニアンを変形できることを保証する事実がある.

(Proposition D.1 in [7]) $H = \sum_j H_j$ をギャップのある局所ハミルトニアンとする. (ここでの局所の意味は, $\| [H_j, O_i] \|$ が任意のべきより早く減衰すること.) 基底状態 $|\Psi\rangle$ のエネルギー固有値はゼロとする. $\Delta > 0$ をギャップとする. このとき, $|\Psi\rangle$ をある局所項 H_j のゼロエネルギー固有状態 $\tilde{H}_j |\Psi\rangle = 0$ として表現できる.

説明はApp. Bを見よ. 注意として, 仮に H_j が k -localとしても \tilde{H}_j にはtailが存在する. k -localとtailがある場合で結果がどの程度変わるかが問題となるが, ギャップ系においては基底状態の性質の多くはfrustration free系から得られると考えるのは自然であろう.

以下, \log の底は2とする.

2 Detectability lemma [3]

[3]に従って, Detectability lemmaの証明をメモする. Detectability lemmaが初出は[2]. [4]にはより簡単な証明が書かれているらしいが, こちらは未確認.

2.1 設定

設定を述べる. 1次元格子上的Hilbert空間 $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^d)^{\otimes n}$ を考える. n はサイト数. ハミルトニアン $H = \sum_i H_i$ の局所項 H_i は近接2サイトにのみ台を持つものとする. この仮定はfinite rangeであればいつでもこのように取ることができる. H_i の最低固有値は0であり, 最低固有値に縮退はないものとする. $H \geq 0$ である. なぜなら, 任意の状態 $|\psi\rangle$ に対して

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_i \langle \psi | H_i | \psi \rangle \quad (2.1)$$

であるが, $\langle \psi | H_i | \psi \rangle \geq 0$ より. 基底状態は一意でなくても良いが, 縮退があればエネルギー固有値は完全に縮退しているものとする. 基底状態の部分空間を \mathcal{H}_0 , その直交補空間を \mathcal{H}^\perp と書く. H のスペクトルギャップを $\epsilon > 0$ とする. つまり,

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}^\perp \Rightarrow \langle \psi | H | \psi \rangle \geq \epsilon > 0 \quad (2.2)$$

を仮定する. ハミルトニアンはfrustration freeとする. つまり,

$$|\Omega\rangle \in \mathcal{H}_0 \Leftrightarrow \forall_i, H_i |\Omega\rangle = 0, \quad (2.3)$$

が成立しているものとする. 局所ハミルトニアン H_i を“平坦化”した直交射影を, H_i の最低固有値を0に, それ以外の固有値が1になるように変形したものとして定義する. 具体的には, $H_i = \sum_{E_n^{(i)} > 0} E_n^{(i)} |n^{(i)}\rangle \langle n^{(i)}|$ と対角化して $Q_i = \sum_{E_n^{(i)} > 0} |n^{(i)}\rangle \langle n^{(i)}|$ とすれば良い. この変形はfrustration free条件を保つ. つまり,

$$|\Omega\rangle \in \mathcal{H}_0 \Leftrightarrow \forall_i, Q_i |\Omega\rangle = 0. \quad (2.4)$$

射影 $P_i = 1 - Q_i = |0^{(i)}\rangle \langle 0^{(i)}|$ を導入する.

$$|\Omega\rangle \in \mathcal{H}_0 \Leftrightarrow \forall_i, P_i |\Omega\rangle = |\Omega\rangle. \quad (2.5)$$

各サイトにおける基底状態への射影の積からなる，次の演算子を導入する．

$$A := \Pi_{\text{even}} \Pi_{\text{odd}}, \quad (2.6)$$

$$\Pi_{\text{even}} = P_2 P_4 P_6 \cdots, \quad (2.7)$$

$$\Pi_{\text{odd}} = P_1 P_3 P_5 \cdots. \quad (2.8)$$

ここで，隣り合った射影 $P_{2i-1}, P_{2i}, P_{2i}, P_{2i+1}$ は可換ではないが，それ以外は可換であることに注意．また

$$|\Omega\rangle \in \mathcal{H}_0 \Rightarrow A|\Omega\rangle = A^\dagger|\Omega\rangle = |\Omega\rangle \quad (2.9)$$

に注意．また，

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}^\perp \Rightarrow A|\psi\rangle \in \mathcal{H}^\perp \quad (2.10)$$

が成立する．なぜなら $\langle \Omega | A | \psi \rangle = \langle \Omega | \psi \rangle = 0$ より $A|\psi\rangle$ は基底状態の成分がゼロ．結局， A は $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}^\perp$ なる分解において

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & A|_{\mathcal{H}^\perp} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

なる表示を持つ． A は基底状態を保ち，励起状態の成分を減じる性質があるため，十分大きい l に対して， A^l は基底状態への射影に近い演算子であると期待される．局所項を平坦化したハミルトニアンを

$$H_Q = \sum_i Q_i \quad (2.12)$$

とする．この変形で基底状態は不変に保たれ，かつ，スペクトルギャップも有限に保たれるものと仮定する³． H_Q のスペクトルギャップを ϵ_Q とする．Detectability lemma の主張は以下．

Theorem 2.1 (Detectability lemma. [3]). 空間 1 次元, *frustration free*, *2-local*, ギャップありの系を考える．射影演算子からなるハミルトニアン $H = \sum_i Q_i$ のスペクトルギャップを $\epsilon_Q > 0$ とする．以下が成立する．

$$\|A|_{\mathcal{H}^\perp}\| < \frac{1}{(\epsilon_Q/2 + 1)^{\frac{1}{3}}}. \quad (2.13)$$

つまり， A の \mathcal{H}^\perp への作用はスペクトルギャップが有限であれば真に 1 より小さい．(証明) 直交補空間から規格化された状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^\perp$ をひとつ取る． $|\phi\rangle := A|\psi\rangle$ とする． $|\phi\rangle \in \mathcal{H}^\perp$ であるので

$$\langle \phi | H_Q | \phi \rangle \geq \epsilon_Q \|\phi\|^2 \quad (2.14)$$

が成立． $\langle \phi | H_Q | \phi \rangle$ を上から評価する．まず³， $Q_{i \in \text{odd}} \Pi_{\text{odd}} = 0$ であるから， $i \in \text{odd}$ は寄与しないことに注意． A を以下のように変形する．

$$A = \underbrace{(P_1 P_3 P_2)}_{\Delta_1} \underbrace{(P_5 P_7 P_6)}_{\Delta_2} \cdots \underbrace{(P_4 P_8 \cdots)}_R =: \Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_m R. \quad (2.15)$$

$m \sim n/4$ である． $R^\dagger = R$ に注意． $\langle \phi | Q_{4i-2} | \phi \rangle$ を評価する．

$$\langle \phi | Q_{4i-2} | \phi \rangle = \|(1 - P_{4i-2})A\psi\| = \|(1 - P_{4i-2})\Delta_1 \Delta_2 \cdots R\psi\| \quad (2.16)$$

$$= \|\Delta_1 \cdots \Delta_{i-1} (1 - P_{4i-2}) \Delta_i \cdots R\psi\| \leq \|(1 - P_{4i-2}) \Delta_i \cdots R\psi\|. \quad (2.17)$$

$\|Av\| \leq \|A\| \|v\|$ に注意⁴．

$$v_i = \Delta_i \Delta_{i+1} \cdots R|\psi\rangle, \quad v_{m+1} = R|\psi\rangle, \quad (2.18)$$

³示していない．

⁴ $\|A\| := \max v \neq 0 \|Av\|/\|v\| \geq \|Av\|/\|v\|$ より．

と置く.

$$\|v_i\| = \|\Delta_i v_{i+1}\| \leq \|\Delta_i\| \|v_{i+1}\| \leq \|v_{i+1}\| \quad (2.19)$$

に注意.

$$\langle \phi | Q_{4i-2} | \phi \rangle \leq \|(1 - P_{4i-2})\Delta_i v_{i+1}\|^2 = \|(1 - P_{4i-2})P_{4i-3}P_{4i-1}P_{4i-2}v_{i+1}\|^2, \quad v_i = \Delta_i v_{i+1}, \quad (2.20)$$

なる表式. すると, (A.1)より ($X = P_{4i-3}P_{4i-1}, Y = P_{4i-2}, v = v_{i+1}/\|v_{i+1}\|$ とする),

$$\|(1 - P_{4i-2})\Delta_i v_{i+1}\|^2 \leq \left(1 - \frac{\|v_i\|^2}{\|v_{i+1}\|^2}\right) \frac{\|v_i\|^2}{\|v_{i+1}\|^2} \|v_{i+1}\|^2 \leq \left(1 - \frac{\|v_i\|^2}{\|v_{i+1}\|^2}\right) \quad (2.21)$$

と評価できる. $\|v_i\| \leq \|v_{m+1}\| = \|R|\psi\rangle\| \leq \|R\| = 1$ に注意.

$$a_i = \frac{\|v_i\|^2}{\|v_{i+1}\|^2}, i = 1, \dots, m, \quad a_{m+1} = \|R\psi\|^2, \quad (2.22)$$

$$a_1 \cdots a_{m+1} = \|v_1\|^2 = \|\phi\|^2 \quad (2.23)$$

と置くと, 結局

$$\langle \phi | Q_{4i-2} | \phi \rangle \leq 1 - a_i \quad (2.24)$$

が得られた. 結局以下の評価が得られた.

$$\langle \phi | \sum_i Q_{4i-2} | \phi \rangle = \sum_{i=2,6,\dots} (1 - a_i), \quad a_1 \cdots a_{m+1} = \|\phi\|^2. \quad (2.25)$$

Lagrange未定乗数法で極値を求めると⁵, $a_i = \|\phi\|^{2/m+1}$ のとき最大値を取る. よって

$$\langle \phi | \sum_i Q_{4i-2} | \phi \rangle \leq m(1 - \|\phi\|^{\frac{2}{m}}). \quad (2.26)$$

m に依存しない評価がほしい. $\|\phi\|^2 = 1 + \delta x$ として展開すると

$$m(1 - (1 + \delta x)^{1/m}) \sim -\delta x + \frac{1}{2} \frac{1}{m} (1 - \frac{1}{m}) \delta x^2. \quad (2.27)$$

ここで $1/m(1 - 1/m) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{m})^2$ であるから

$$-\delta x + c\delta x^2, \quad c \geq \frac{1}{8} \quad (2.28)$$

なる関数で上から押さえれば良いだろう.

$$m(1 - x^{\frac{1}{m}}) \leq \frac{1-x}{\sqrt{x}}, \quad x \in [0, 1] \quad (2.29)$$

が示される⁶. よって

$$\langle \phi | \sum_i Q_{4i-2} | \phi \rangle \leq \frac{1 - \|\phi\|^2}{\|\phi\|}. \quad (2.30)$$

同様に, Q_{4i} に対しても, 例えば $A = P_2P_1(P_4P_6\cdots)(P_3P_5\cdots)$ と再定義すれば, 同様にして

$$\langle \phi | \sum_{i=4,8,\dots} Q_{4i} | \phi \rangle \leq \frac{1 - \|\phi\|^2}{\|\phi\|} \quad (2.31)$$

⁵対称式だから $a_i = \text{const.}$ で極値を取るのは自明か.

⁶ $f_m(x) = m\sqrt{x}(1 - x^{1/m}) - (1 - x)$ と置くと, $f'_m(x) = \frac{(m^2-4)x^{\frac{1}{m}} - m^2}{4mx^{\frac{3}{2}}} \geq 0$ が示される. よって $f'_m(x)$ は $[0, 1]$ で単調減少であるが, $f'_m(1) = 0$ であるので $f'_m(x) \geq 0$ が示される. よって $f_m(x)$ は $[0, 1]$ で単調増加であるが, $f_m(1) = 0$ より $f_m(x) \leq 0$.

が得られる⁷.

以上より,

$$\epsilon_Q \|\phi\|^2 \leq \langle \phi | H_Q | \phi \rangle \leq 2 \frac{1 - \|\phi\|^2}{\|\phi\|} \quad (2.32)$$

が得られた. これから

$$\epsilon_Q \|\phi\|^3 \leq 2(1 - \|\phi\|^2) \leq 2(1 - \|\phi\|^3) \quad (2.33)$$

となり,

$$\|\phi\| \leq \frac{1}{(1 + \epsilon_Q/2)^{\frac{1}{3}}} \quad (2.34)$$

を得る. □

3 Diluting lemma [5]

1次元格子上的ハミルトニアンで, 局所ハミルトニアン H_i はサイト $i, i+1$ に台を持ち, frustration freeとする. 局所Hilbert空間の次元を d とする. 簡単のため, ハミルトニアンは射影演算子の和とする.

$$H = \sum_i Q_i = \sum_i (1 - P_i), \quad P_i |\Omega\rangle = |\Omega\rangle. \quad (3.1)$$

ハミルトニアンはギャップがあり, 有限のスペクトルギャップ $\Delta > 0$ を持つものとする. 基底状態の一意性は課さない. 基底状態の部分空間を \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_0 への直交射影を P , 励起状態の空間を \mathcal{H}^\perp と書く.

$$\Pi_{\text{even}} = \prod_{i \in \text{even}} P_i, \quad \Pi_{\text{odd}} = \prod_{i \in \text{odd}} P_i, \quad (3.2)$$

$$A = \Pi_{\text{even}} \Pi_{\text{odd}}, \quad (3.3)$$

とする. A は直和分解 $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}^\perp$ を保ち, つまり

$$A = PAP + (1 - P)A(1 - P) \quad (3.4)$$

が成立し, かつDetectability補題より,

$$\|A|_{\mathcal{H}^\perp}\|^2 \leq \Delta_0 := (1 + \epsilon/2)^{-2/3} \quad (3.5)$$

が成立する.

Schmidt分解のカットを, ある $2i, 2i+1$ サイトの間に固定する. 状態 $|\phi\rangle$ のSchmidtランクを $SR(\phi)$ と書く. Schmidtランクに関して, 以下の性質に注意する.

Fact.

- $SR(\phi + \psi) \leq SR(\phi) + SR(\psi)$.
- 演算子 O がカットの両側に台を持ち, かつ k -localであるとき, $SR(O\phi) \leq d^k SR(\phi)$.
- カット $(i, i+1)$ におけるSRを r_i , カット $(j, j+1)$ におけるSRを r_j とすると,

$$d^{-|i-j|} r_j \leq r_i \leq d^{|i-j|} r_j \quad (3.6)$$

が成立する.

3つ目の性質は, i と j の間の自由度の足がSchmidt分解の足に加わるため. 扱う局所演算子は2-localで

⁷有限サイトでは, 右端の境界で何が起きているかをきちんと考える必要があるだろう.

あるので、表記の簡単化のため、局所演算子に対するSRの増大因子を

$$D_0 := d^2 \quad (3.7)$$

と表記する。

Approximate ground-space projection (AGSP) を定義する。

Definition 3.1 (AGSP. Definition III.1 in [5]). あるカット $i^*, i^* + 1$ に対して、演算子 K が (D, Δ) -AGSP とは、以下を満たすこと。

- (a) 基底状態を保つ. $K|\Omega\rangle = |\Omega\rangle, |\Omega\rangle \in \mathcal{H}_0$.
- (b) Shrinking. $\|K|_{\mathcal{H}^\perp}\|^2 \leq \Delta (< 1)$.
- (c) Entangling. $SR(K|\phi\rangle) = D \cdot SR(\phi)$.

基底状態 $|\Omega\rangle$ と有限の重なりをもつ状態 $|\phi\rangle$ から出発して、AGSP K より基底状態の近似

$$K|\phi\rangle / \|K|\phi\rangle\| \quad (3.8)$$

が得られる。このとき、どの程度基底状態以外の成分を消せたか (Δ) と Schmidt ランクの増大 (D) はトレードオフの関係にある。

[5]の主結果は以下。

Theorem 3.2 (Diluting lemma. Lemma III.5 in [5]). 1次元 *frustration free* かつギャップのある系において、スペクトルギャップを $\epsilon > 0$ 、局所 Hilbert 空間の次元を d 、 $X = \log d/\epsilon$ とする。以下を満たす (D, Δ) -AGSP が存在する。

- $D\Delta < 1/2$.
- $\log D \leq O(1)X^3 \log^8 X$.

[5]では、以下を満たす \hat{A} を具体的に構成することにより、定理 3.2 を証明している。

Lemma 3.3 ([5]). $X = \frac{\log d}{\epsilon}$ と書く。以下の性質を満たす \hat{A} が存在する。

- (a) 基底状態 $|\Omega\rangle \in \mathcal{H}_0$ に対して、 $\hat{A}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$.
- (b) $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^\perp$ に対して $\hat{A}|\psi\rangle \in \mathcal{H}^\perp$ かつ、 $\|\hat{A}|\psi\rangle\|^2 \leq \hat{\Delta}$.
- (c) 任意の状態 $|\phi\rangle$ と任意の $l > 0$ に対して、 $SR(\hat{A}^l|\phi\rangle) \leq D_I \hat{D}^l SR(\phi)$.
- (d) 以下を満たす^a :

$$\hat{D}\hat{\Delta} \leq 1/2, \quad (3.9)$$

$$\log \hat{D} \leq \log(\hat{\Delta}^{-1}) \leq O(1) \log^2 X, \quad (3.10)$$

$$\log D_I \leq O(1) X^3 \log^6 X. \quad (3.11)$$

^a $O(1)$ は単に定数であり、オーダーが 1 なる定数ではない。

実際、このような \hat{A} が存在すれば、 $K = \hat{A}^l$ は $(D_I \hat{D}^l, \hat{\Delta}^l)$ -AGSP。そこで

$$D_I \hat{D}^l \hat{\Delta}^l = D_I (\hat{D}\hat{\Delta})^l < 1/2, \quad (3.12)$$

つまり,

$$l > \frac{\log D_I - 1/2}{\log[(\hat{D}\hat{\Delta})^{-1}]} \quad (3.13)$$

を満たす l を選ぶ.

$$\frac{\log D_I - 1/2}{\log[(\hat{D}\hat{\Delta})^{-1}]} \leq \frac{\log D_I}{\log 2} = \log D_I \quad (3.14)$$

であるので,

$$l_0 = \lceil \log D_I \rceil \quad (3.15)$$

とする. このとき,

$$\log(D_I \hat{D}^{l_0}) \leq O(1)X^3 \log^6 X + O(1)l_0 \log^2 X \quad (3.16)$$

$$= O(1)X^3 \log^6 X + O(1) \log D_I \log^2 X \quad (3.17)$$

$$\leq O(1)X^3 \log^6 X + O(1)X^3 \log^8 X \quad (3.18)$$

$$= O(1)X^3 \log^8 X \quad (3.19)$$

より定理の主張を得る.

3.1 補題3.3の証明

カットを中心とする m 個の偶数サイトの集合を簡単のため $I_m = \{1, \dots, m\}$ と書き, その射影の積を

$$\hat{\Pi}_m = \prod_{i=1}^m P_i \quad (3.20)$$

と書く. また, I_m 以外の偶数サイトの射影の積を Π_{rest} と書く.

$$A = \Pi_m \Pi_{\text{rest}} \Pi_{\text{odd}} \quad (3.21)$$

である.

基底状態とのoverlapが非ゼロの任意の状態に A を作用させると真の基底状態に近づくが, カット近傍の演算子を当てる毎にSchmidtランクは増大する. Π_m を近似する, より演算子を当てる回数が小さい $\hat{\Pi}_m$ を導入して, Schmidtランクの増大を抑えつつ, かつ基底状態への近づき方が Π_m よりもそれほど遅くないような, $\hat{\Pi}_m$ を構成する, というのがやりたいこと.

以下, Π_m をある種のハミルトニアンを複数回作用させる, という演算子で近似する.

$$N := \sum_{i=1}^m (1 - P_i) \quad (3.22)$$

とする. N の固有値は, $\{0, 1, \dots, m\}$ である. $N = 0$ と $N > 0$ への射影はそれぞれ

$$\Pi_m, \quad 1 - \Pi_m \quad (3.23)$$

で与えられることに注意せよ.

Fact. 以下を満たす多項式関数 C が存在する：

- 次数は \sqrt{m} . (m は平方数として仮定して良い.)
- $C(0) = 1$.
- $x = 1, 2, \dots, m$ に対して, $|C(x)| \leq 1/3$.

具体的構成は[5]を見よ⁸.

$$\hat{\Pi}_m := [C(N)]^q \quad (3.24)$$

と定義する. q はあとで決める. $\hat{\Pi}_m$ は N の

$$j := q\sqrt{m} \quad (3.25)$$

次の関数である.

構成より, \hat{A} は直和分解 $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}^\perp$ を保つ. なぜなら $N|_{\mathcal{H}_0} = 0$ より $C(N)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle, |\Omega\rangle \in \mathcal{H}_0$ に注意すると, $|n\rangle \in \mathcal{H}^\perp$ に対して, 対角要素はゼロ:

$$\langle n | \hat{A} | \Omega \rangle = 0. \quad (3.26)$$

よって \hat{A} はブロック対角的

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \hat{A}|_{\mathcal{H}^\perp} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

ノルムの見積もり— $\|\hat{A}|_{\mathcal{H}^\perp}\|$ を評価する. 任意の励起状態 $|\Omega^\perp\rangle \in \mathcal{H}^\perp$ に対して,

$$\hat{A}|\Omega^\perp\rangle = \hat{\Pi}_m \Pi_{\text{rest}} \Pi_{\text{odd}} |\Omega^\perp\rangle \quad (3.28)$$

$$= \hat{\Pi}_m \Pi_m \Pi_{\text{rest}} \Pi_{\text{odd}} |\Omega^\perp\rangle + \hat{\Pi}_m (1 - \Pi_m) \Pi_{\text{rest}} \Pi_{\text{odd}} |\Omega^\perp\rangle \quad (3.29)$$

$$=: \hat{\Pi}_m |\psi_0\rangle + \hat{\Pi}_m |\psi_1\rangle \quad (3.30)$$

と置く. $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$ はそれぞれ $N = 0, N > 0$ セクターに属する. 第一項は $\hat{\Pi}_m |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle$ であるから,

$$\|\hat{\Pi}_m |\psi_0\rangle\|^2 = \|\psi_0\|^2 = \|A|\Omega^\perp\rangle\|^2 \leq \Delta_0 \|\Omega^\perp\|^2 \quad (3.31)$$

と評価できる. 第二項は $\hat{\Pi}_m$ の定義より, ノルムは $(1/9)^q$ で抑えられる. つまり, $N = 1, \dots, m$ の固有空間に分解して

$$|\psi_1\rangle = \sum_{n=1}^m \alpha_n |n\rangle \quad (3.32)$$

と表示すると,

$$\hat{\Pi}_m |\psi_1\rangle = \sum_{n=1}^m \alpha_n [C(n)]^q |n\rangle \quad (3.33)$$

であるので,

$$\|\hat{\Pi}_m |\psi_1\rangle\|^2 \leq \sum_{n=1}^m |\alpha_n|^2 |C(n)|^{2q} \|n\|^2 \leq \left(\frac{1}{9}\right)^q \sum_{n=1}^m |\alpha_n|^2 \|n\|^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^q \|\psi_1\|^2. \quad (3.34)$$

⁸第一種Chebyshev多項式を用いる. 条件を $1 \leq x \leq m$ に対して $|C(x)| < 1/3$ に取り替えた場合, 驚くべきことに, [5]によると, “In fact, it can be shown that this construction is optimal: as shown in Ref. 23, any polynomial that satisfies the above two properties must be of at least degree \sqrt{m} .”と書かれており, この意味で最良の構成となっているらしい. Ref.23は, R. Paturi, in Proceedings of the twenty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing, STOC '92 (ACM, New York, NY, USA, 1992) pp. 468–474.

さらに,

$$\|\psi_1\| = \|(1 - \Pi_m)\Pi_{\text{rest}}\Pi_{\text{odd}}|\Omega^\perp\rangle\| \leq \|\Omega^\perp\| \quad (3.35)$$

より,

$$\|\hat{A}|\Omega^\perp\rangle\|^2 \leq \hat{\Delta}\|\Omega^\perp\|^2, \quad \hat{\Delta} = \Delta_0 + (1/9)^q. \quad (3.36)$$

$(1/9)^q$ が m, d に依存しないことに注意. m はSchmidtランクの増大とのトレードオフから決める.

Schmidtランクの見積もり— \hat{A} を l 回施すと, どの程度Schmidtランクが増大するかを見積もる. 表記の簡単化のため, SRの増大を引き起こさない演算子をまとめて

$$\Pi' = \Pi_{\text{rest}}\Pi_{\text{odd}} \quad (3.37)$$

と書く.

$$\hat{A} = \hat{\Pi}_m\Pi' \quad (3.38)$$

である. $\hat{\Pi}_m$ は N の j 次の多項式関数であるから,

$$\hat{\Pi}_m = \sum_{i=0}^j c_i N^i \quad (3.39)$$

と書ける. したがって, $\hat{A}^l = (\hat{\Pi}_m\Pi')^l$ は

$$\left(\sum_{i=0}^j c_i N^i\right)\Pi' = \sum_{i_1, \dots, i_l \in \{0, \dots, j\}^{\times l}} c_{i_1} \cdots c_{i_l} N^{i_1}\Pi' \cdots N^{i_l}\Pi' \quad (3.40)$$

の形. Schmidtランクの増大は N のみから生じるため,

$$(N^j\Pi')^l \quad (3.41)$$

なる項が最もSchmidtランクを増大させる. 項の総数は $(j+1)^l$ であるので, Schmidtランクの上限の線形性より, $(N^j\Pi')^l$ によるSchmidtランクの増大に対して因子

$$(j+1)^l \quad (3.42)$$

をかけることにより, ひとつの上限が与えられる.

まず素朴に見積もってみよう. カットをまたぐ射影 $Q_{i^*} = (1 - P_{i^*})$ のみからSchmidtランクの増大が生じる. $N = \sum_i Q_i$ の項は互いに可換であり, 各 Q_i は射影であるから, \hat{O}_1, \hat{O}_2 をサイト $i^*, i^* + 1$ に台を持たない演算子として, $N^j = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 Q_{i^*}$ と書くことができる. すると,

$$SR(N^j\Pi'|\phi) = SR(\hat{O}_1 + \hat{O}_2 Q_{i^*}|\phi) = (1 + d^2)SR(\phi). \quad (3.43)$$

l 回繰り返して因子 $(j+1)^l$ をつけて,

$$SR(\hat{A}^l|\phi) \leq (j+1)^l(1 + d^2)^l SR(\phi) \quad (3.44)$$

を得る. ところがこの表式は見積もりとしては大きく, パラメータ m, q を調整して小さくすることができない.

よりtightな評価は性質(3.6)から得られる: サイト $i \in I_m$ の, どのサイトを用いてSRの増大を評価しても良い. 任意の $i, j \in I_m$ に対して,

$$r_i \leq d^{|i-k|} r_k \leq D_0^m r_k \quad (3.45)$$

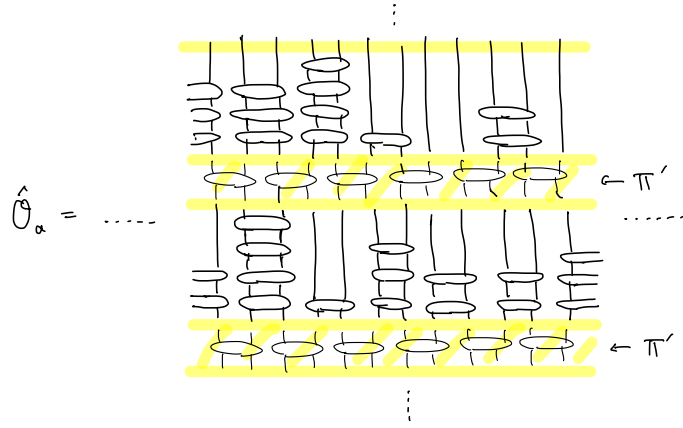


Figure 1: 最も疎な Q_i を見つければ良い.

が成立する. よって, 最小の r_k に対して最大で定数因子 D_0^m をかければ上限が得られる.

よって,

$$(N^j \Pi')^l = \sum_a \hat{O}_a \quad (3.46)$$

などと I_m に台を持つ演算子 \hat{O}_a の和として書いたとき, 各演算子 \hat{O}_a において, I_m 内の射影 $Q_i, i = 1, \dots, m$ の次数が最小の $i \in I_m$ を見積もれば良い. 図1を見よ. I_m を再帰的に2分割し, そのような最小の i を見積もる.

(1st round) $N = \sum_{i \in I_m} Q_i$ をカットの左と右に分けて,

$$N = N_L + N_R, \quad N_L = \sum_{i=1}^{m/2} Q_i, \quad N_R = \sum_{i=m/2+1}^m Q_i, \quad (3.47)$$

と書く. すると, 展開式

$$(N^j \Pi')^l = \sum_{n_l=0}^j \binom{j}{n_l} N_L^{j-n_l} N_R^{n_l} \Pi' \dots \sum_{n_2=0}^j \binom{j}{n_2} N_L^{j-n_2} N_R^{n_2} \Pi' \sum_{n_1=0}^j \binom{j}{n_1} N_L^{j-n_1} N_R^{n_1} \Pi' \quad (3.48)$$

は $(j+1)^l$ 個の項から成る. 各項は N_L, N_R の次数はそれぞれ $jl - \sum_{i=1}^l n_i, \sum_{i=1}^l n_i$. N_L, N_R の次数のうち小さい方の上限は,

$$\min_{\{n_i\}_i} \left(jl - \sum_{i=1}^l n_i, \sum_{i=1}^l n_i \right) \leq jl - \frac{jl}{2} = \frac{jl}{2} \quad (3.49)$$

であるので, $(N^j \Pi')^l$ は $(j+1)^l$ 個の, 高々次数が $jl/2$ 次の N_L or N_R の積からなる. 一般性を失わず, 次数の低い方を N_R と書いて良い.

(2nd round) 高々次数が $jl/2$ なる N_R の項を取り出すと, 係数を無視して

$$N_R^{n_l} (*) \dots N_R^{n_2} (*) N_R^{n_1} (*), \quad \sum_{i=1}^l n_i \leq \frac{jl}{2}, \quad (3.50)$$

なる表式. ここで, $(*)$ は N_R 以外の演算子の積. さらに

$$N_R = N_{RL} + N_{RR} \quad (3.51)$$

と2分割すると、係数を無視して、以下の展開を得る.

$$\sum_{m_l=0}^{n_l} N_{RL}^{n_l-m_l} N_{RR}^{m_l}(\ast) \cdots \sum_{m_2=0}^{n_2} N_{RL}^{n_2-m_2} N_{RR}^{m_2}(\ast) \sum_{m_1=0}^{n_1} N_{RL}^{n_1-m_1} N_{RR}^{m_1}(\ast). \quad (3.52)$$

N_{RL}, N_{RR} の次数の最小値の上限は,

$$\min_{\{m_i\}_i} \left(\sum_{i=1}^l (n_i - m_i), \sum_{i=1}^l m_i \right) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l n_i \leq \frac{jl}{4}. \quad (3.53)$$

また、項数は

$$\prod_{i=1}^l \sum_{m_i=0}^{n_i} = \prod_{i=1}^l (n_i + 1) \quad (3.54)$$

であるが、 $\sum_{i=1}^l n_i \leq jl/2$ の条件のもと、 $n_i \equiv j/2$ のとき最大値を取るのて、

$$\prod_{i=1}^l \sum_{m_i=0}^{n_i} = \prod_{i=1}^l (n_i + 1) \leq \prod_{i=1}^l (j/2 + 1) = (j/2 + 1)^l. \quad (3.55)$$

したがって、高々 $(j/2 + 1)^l$ 個で高々次数が $jl/4$ の演算子 N_{RL} or N_{RR} が得られた.

同様にして、 $\log j$ 回実行して、項数が高々

$$\underbrace{[(j+1)(j/2+1)\cdots(1+1)]}_{\log j}^l \quad (3.56)$$

の、次数が高々

$$\frac{jl}{2^{\log j}} = \frac{jl}{j} = l \quad (3.57)$$

の、区間 $I_{m/2^{\log j}} = I_{m/j} (= I_{\sqrt{m}/q})$ 上の演算子 $\tilde{N} = \sum_{i \in I_{m/j}} Q_i$ にまで帰着された.

残りの $\log(m/j)$ round を見積もる.

$$\tilde{N}^{n_l}(\ast) \cdots \tilde{N}^{n_1}(\ast), \quad \sum_{i=1}^l n_i \leq l, \quad (3.58)$$

なる項を分割する. $\tilde{N} = \tilde{N}_L + \tilde{N}_R$ と分割すると、項数 $\prod_{i=1}^l (n_i + 1)$ は n_i が全て等しいとき $n_i \equiv 1$ に最大となる.

$$\prod_{i=1}^l (n_i + 1) \leq 2^l. \quad (3.59)$$

また、次数の上限は $l/2$. 次の round においては,

$$\tilde{N}^{n_l}(\ast) \cdots \tilde{N}^{n_1}(\ast), \quad \sum_{i=1}^l n_i \leq l/2, \quad (3.60)$$

の項数 $\prod_{i=1}^l (n_i + 1)$ の上限を条件 $\sum_{i=1}^l n_i \leq l/2$ のもとで見積もるが、このときはできるだけ多くの n_i が等しいときに項数が最大となり、つまり $l/2$ 個の i に対して $n_i = 1$, 残りは $n_i = 0$ の場合であり、項数は

$$\prod_{i=1}^l (n_i + 1) \leq 2^{l/2} \quad (3.61)$$

と見積もられる。次数の最大値は $l/4$ 。以下同様にして、 $\log(m/j)$ round で得られる項数の総数は

$$2^l 2^{l/2} 2^{l/4} \dots = 2^{l(1+1/2+1/4+\dots)} \leq 2^{2l} = 4^l. \quad (3.62)$$

また、最終的に得られる次数の最大値は

$$\frac{l}{2^{\log(m/j)}} = \frac{l}{m/j} = \frac{lj}{m}. \quad (3.63)$$

であり、SRランクの増大因子 $D_0^{lj/m}$ が生じる。

最後に、(3.45)より生じる定数因子と(3.42)をかけて、結局SRの増大因子として、

$$SR(\hat{A}|\phi) = D_0^m \times [(j+1)(j/2+1)\cdots(1+1)]^l \times 4^l \times D_0^{lj/m} \times (j+1)^l SR(\phi) \quad (3.64)$$

が得られた。ここで、不等式

$$4(j+1)^2(j/2+1)(j/4+1)\cdots(1+1) \leq 20j^{3/2}2^{\frac{1}{2}\log^2 j}, \quad j \geq 2, \quad (3.65)$$

として⁹ 結局、

$$SR(\hat{A}|\phi) = D_I \hat{D} \cdot SR(\phi), \quad (3.70)$$

$$D_I = D_0^m, \quad \hat{D} = 20j^{3/2}2^{\frac{1}{2}\log^2 j} D_0^{lj/m}, \quad (3.71)$$

が得られた。

粗視化— ギャップとSchmidtランクの増大は

$$\hat{\Delta} \cdot \hat{D} = (\Delta_0 + (1/9)^q) \times 20j^{3/2}2^{\frac{1}{2}\log^2 j} D_0^{lj/m} \quad (3.72)$$

の関係にあり、望みの条件 $\hat{\Delta} \hat{D} < 1/2$ は一般には満たされない。 k サイトを1サイトにまとめる、“粗視化”を行う。 k サイトを1サイトにまとめて、新たにハミルトニアンを2-localとみなし、射影を定義し、演算子

$$A' = \Pi'_{\text{odd}} \Pi'_{\text{even}}, \quad (3.73)$$

$$\Pi'_{\text{odd}} = P'_1 P'_3 \cdots, \quad \Pi'_{\text{even}} = P'_2 P'_4 \cdots, \quad (3.74)$$

を定義する。例えば

$$Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{2k-1} \xrightarrow{\text{flattening}} Q'_1 = 1 - P'_1, \quad (3.75)$$

$$Q_{k+1} + Q_{k+2} + \cdots + Q_{3k-1} \xrightarrow{\text{flattening}} Q'_2 = 1 - P'_2, \quad (3.76)$$

$$Q_{k(i-1)+1} + Q_{k(i-1)+2} + \cdots + Q_{ki+k-1} \xrightarrow{\text{flattening}} Q'_i = 1 - P'_i, \quad (3.77)$$

9

$$\prod_{k=0}^{\log j} (j/2^k + 1) = j^{\frac{1}{2}(1+\log j)} \times \left(-\frac{1}{j}; 2 \right)_{\log(2j)}. \quad (3.66)$$

ここで、

$$(a; q)_n = (a; q)_\infty / (aq^n; q)_\infty, \quad (a; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k), \quad (3.67)$$

はポツホハンマー記号。Mathematicaでプロットすると、

$$\frac{j+1}{j} \left(-\frac{1}{j}; 2 \right)_{\log(2j)} \leq 5 \quad (3.68)$$

が成立していると思われる。これを認めると、

$$4(j+1)^2(j/2+1)(j/4+1)\cdots(1+1) \leq 20j^{3/2}2^{\frac{1}{2}\log^2 j} = 20j^{3/2}2^{\frac{1}{2}\log^2 j}. \quad (3.69)$$

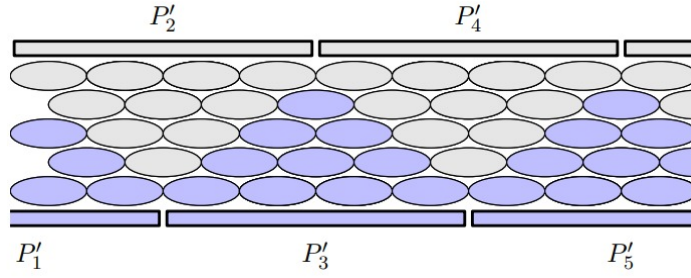


Figure 2: 図は[5]より.

である. この平坦化操作でスペクトルギャップ ϵ はそれほど変化しないものと仮定しよう¹⁰. このとき,

$$\underbrace{(P_k)(P_{k-1}P_{k+1})\cdots(P_3P_5\cdots P_{2k-3})(P_2P_4\cdots P_{2k-2})(P_1P_3\cdots P_{2k-1})}_{\text{"pyramid" or "light-cone"}} P'_1 = P'_1 \quad (3.78)$$

が成立する. 他の P'_i でも同様. なぜなら, $P'_1 = 1$ なる部分空間においては平坦化の仮定より $P_1 = P_2 = \cdots = P_{2k-1} = 1$ が成立するから. エルミート共役を取り,

$$P'_1(P_1P_3\cdots P_{2k-1})(P_2P_4\cdots P_{2k-2})(P_3P_5\cdots P_{2k-3})\cdots(P_{k-1}P_{k+1})(P_k) = P'_1 \quad (3.79)$$

も成立する. すると, 例えば $k = 4$ のとき,

$$\Pi'_{\text{odd}}\Pi'_{\text{even}} = \Pi'_{\text{odd}}\Pi_{\text{even}}\Pi_{\text{odd}}\Pi_{\text{even}}\Pi_{\text{odd}}\Pi_{\text{even}}\Pi'_{\text{even}} \quad (3.80)$$

$$= \Pi'_{\text{odd}}\Pi_{\text{even}}\Pi_{\text{odd}}\Pi_{\text{odd}}\Pi_{\text{even}}\Pi_{\text{even}}\Pi_{\text{odd}}\Pi_{\text{odd}}\Pi_{\text{even}}\Pi'_{\text{even}} \quad (3.81)$$

$$= \Pi'_{\text{odd}}(\Pi_{\text{even}}\Pi_{\text{odd}}\Pi_{\text{odd}}\Pi_{\text{even}})^2\Pi'_{\text{even}} \quad (3.82)$$

$$= \Pi'_{\text{odd}}(AA^\dagger)^2\Pi'_{\text{even}}. \quad (3.83)$$

理由は図2を見よ. 一般の偶数 k についても

$$\Pi'_{\text{odd}}\Pi'_{\text{even}} = \Pi'_{\text{odd}}(AA^\dagger)^{k/2}\Pi'_{\text{even}} \quad (3.84)$$

が成立する.

よってDetectability lemmaより,

$$\|A'|_{\mathcal{H}^\perp}\|^2 \leq \|AA^\dagger|_{\mathcal{H}^\perp}\|^{k/2} = \Delta_0^k \Rightarrow \Delta'_0 = \Delta_0^k \quad (3.85)$$

となり, k サイトの粗視化により, A の収束性も k 乗される. 一方でSchmidtランクの増大は2-localな射影の台が2サイトから $2k$ サイトに変化するため,

$$D_0 = d^2 \rightarrow D'_0 = d^{2k} = D_0^k, \quad (3.86)$$

となる. k サイトの粗視化による変化をまとめると,

$$D'_0 = D_0^k, \quad \Delta'_0 = \Delta_0^k. \quad (3.87)$$

主張の証明— まず, k サイト粗視化から出発し, \hat{A} を構成すると,

$$D_I = D_0^{km}, \quad (3.88)$$

$$\hat{D} = 20j^{3/2}2^{\frac{1}{2}\log^2 j} D_0^{kj/m}, \quad j = q\sqrt{m}, \quad (3.89)$$

$$\hat{\Delta} = \Delta_0^k + (1/9)^q, \quad \Delta_0 = (1 + \epsilon/2)^{-2/3}. \quad (3.90)$$

3つの自由パラメータがある.

¹⁰未評価. そもそも平坦化の操作でもとのハミルトニアンのスペクトルギャップがどの程度変化するかを見積もるべき.

- いくつのサイトの粗視化するか： k .
- \hat{A} の構成の際に導入された区間 I_m の長さ m .
- \hat{A} の構成の際に導入された $(\Pi'_m)^q$ の次数 q .

[5]に従う。まず、 k を十分大きく取り、 $\hat{\Delta} \leq (1/8)^q$ とする。これは

$$\Delta_0^k \leq (1/8)^q - (1/9)^q, \quad (3.91)$$

つまり、

$$k \geq \frac{-\log((1/8)^q - (1/9)^q)}{\frac{2}{3}\log(1 + \epsilon/2)} = \frac{3q - \log(1 - (8/9)^q)}{\frac{2}{3}\log(1 + \epsilon/2)}. \quad (3.92)$$

$q \geq q_0, \epsilon \leq \epsilon_0$ と仮定して、 $\log(1 + \epsilon/2)/\epsilon > 0$ は単調減少だから、

$$\frac{3q - \log(1 - (8/9)^q)}{\frac{2}{3}\log(1 + \epsilon/2)} \leq \frac{3q - \log(1 - (8/9)^{q_0})}{\frac{2}{3}\epsilon \log(1 + \epsilon_0/2)/\epsilon_0} \quad (3.93)$$

$$= \frac{q}{\epsilon} \times \frac{3 - \log(1 - (8/9)^{q_0})/q}{\frac{2}{3\epsilon_0}\log(1 + \epsilon_0/2)} \leq \frac{q}{\epsilon} \times \frac{3 - \log(1 - (8/9)^{q_0})/q_0}{\frac{2}{3\epsilon_0}\log(1 + \epsilon_0/2)}. \quad (3.94)$$

例えば、 $q_0 = 4, \epsilon_0 = 10$ として、

$$\frac{3 - \log(1 - (8/9)^{q_0})/q_0}{\frac{2}{3\epsilon_0}\log(1 + \epsilon_0/2)} < 20 \quad (3.95)$$

より、

$$k := \frac{20q}{\epsilon} \quad (3.96)$$

を得る。このとき、

$$\hat{\Delta} \leq (1/8)^q + (1/9)^q < 2(1/8)^q \quad (3.97)$$

として、 $\hat{D}\hat{\Delta} < 1/2$ なる十分条件は

$$20j^{3/2}2^{\frac{1}{2}\log^2 j}D_0^{\frac{1}{\epsilon}20qj/m}2(1/8)^q \leq 1/2 \quad (3.98)$$

つまり、

$$\frac{1}{2}\log j + \frac{1}{2}\log^2 j + 40Xqj/m - 3q < -\log(80). \quad (3.99)$$

ここで、 $D_0 = d^2, X = \log d/\epsilon$ を使った。 q, m を選ぶ。 $m = (j/q)^2$ より、

$$\frac{1}{2}\log j + \frac{1}{2}\log^2 j + 40Xq^3/j - 3q < -\log(80). \quad (3.100)$$

が十分条件。そこで

$$40Xq^2/j = 2 \Leftrightarrow j = 20Xq^2 \quad (3.101)$$

として q と j の関係をつけると、

$$\frac{1}{2}\log j + \frac{1}{2}\log^2 j - \underbrace{\sqrt{\frac{j}{20X}}}_q < -\log(80). \quad (3.102)$$

これは十分大きな j でいつでも満たされる。よって $\hat{D}\hat{\Delta} \leq 1/2$ なる k, m, q の選び方が存在することが示された。そのような q のオーダー評価をすると

$$q \sim \log^2 j = \log^2(20Xq^2) \sim \log^2 X. \quad (3.103)$$

これから

$$\log(\hat{\Delta}^{-1}) = 3q - 1 \sim \log^2 X. \quad (3.104)$$

また,

$$m = (20qX)^2 \sim X^2 \log^4 X \quad (3.105)$$

より

$$\log D_I = \log D_0^{mk} = 2mk \log d = 2m \frac{20q}{\epsilon} \log d \sim (X^2 \log^4 X)(\log^2 X)X = X^3 \log^6 X. \quad (3.106)$$

よって示された。□

4 面積則

本節では、基底状態 $|\Omega\rangle$ は一意とする。

基底状態のSchmidt分解を

$$|\Omega\rangle = \sum_{i \geq 1} \lambda_i |L_i\rangle |R_i\rangle \quad (4.1)$$

とする。エンタングルメント・エントロピーは

$$S = - \sum_{i \geq 1} \lambda_i^2 \log \lambda_i^2. \quad (4.2)$$

$|\Omega\rangle$ をあるSchmidtランク C の状態に近似した際に、tail

$$- \sum_{i > C} \lambda_i^2 \log \lambda_i^2 \quad (4.3)$$

の上からの評価が必要になることに注意する。

Lemma 4.1 (Lemma III.3 in [5]). 基底状態 $|\Omega\rangle$ との重なりが有限の積状態 $|\phi\rangle = |L\rangle \otimes |R\rangle$, $\mu = \langle \Omega | \phi \rangle \neq 0$, 及び (D, Δ) -AGSP K の存在を仮定する。

$$S \leq O(1) \frac{\log |\mu|^{-1}}{\log \Delta^{-1}} \log D. \quad (4.4)$$

(証明)

$$|v_l\rangle := \frac{K^l |\phi\rangle}{\|K^l |\phi\rangle\|} = \frac{\mu}{\|K^l |\phi\rangle\|} |\Omega\rangle + \frac{\sqrt{1 - |\mu|^2}}{\|K^l |\phi\rangle\|} K^l |\Omega^\perp\rangle \quad (4.5)$$

を導入する。すると,

$$|\langle \Omega | v_l \rangle| = \frac{|\mu|}{\|K^l |\phi\rangle\|} = \frac{|\mu|}{\sqrt{|\mu|^2 + (1 - |\mu|^2) \|K^l |\Omega^\perp\rangle\|^2}} \geq \frac{|\mu|}{\sqrt{|\mu|^2 + (1 - |\mu|^2) \Delta^l}}. \quad (4.6)$$

また, Schmidtランクについて

$$SR(v_l) \leq D^l. \quad (4.7)$$

よって, $|v_l\rangle$ は高々Schmidtランク D^l であり, 基底状態を少なくとも重み $\frac{|\mu|}{\sqrt{|\mu|^2+(1-|\mu|^2)\Delta^l}}$ の程度で近似する. すると, Eckart-Youngの定理, つまり, Schmidt分解はランク D^l の最良の近似であることから, $|\Omega\rangle$ と絶対値最大の内積をもつ規格化された状態は $\sum_{i \leq D^l} \lambda_i |L_i\rangle |R_i\rangle$. よって

$$\sum_{i \leq D^l} \lambda_i^2 \geq |\langle \Omega | v_l \rangle|^2 \geq \frac{|\mu|^2}{|\mu|^2 + (1 - |\mu|^2)\Delta^l}. \quad (4.8)$$

よって,

$$\sum_{i > D^l} \lambda_i^2 = 1 - \sum_{i \leq D^l} \lambda_i^2 \leq 1 - \frac{|\mu|^2}{|\mu|^2 + (1 - |\mu|^2)\Delta^l} = \frac{(1 - |\mu|^2)\Delta^l}{|\mu|^2 + (1 - |\mu|^2)\Delta^l} \leq \frac{1}{|\mu|^2} \Delta^l =: p_l \quad (4.9)$$

とtailが評価できる. 定数で良いが, 例えば $p_{l_0} < 1$, つまり,

$$l > \frac{\log |\mu|^2}{\log \Delta} \quad (4.10)$$

なる l を選ぶ.

$$l_0 = \lceil \frac{\log |\mu|^2}{\log \Delta} \rceil \quad (4.11)$$

とする. ($\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数.) 同じことだが, $l > l_0$ のとき $p_l \leq \Delta^{l-l_0}$ に注意.

さて, 区間 $[D^{2l} + 1, D^{2(l+1)}]$ におけるエントロピーは分布 $\{\lambda_j^2\}$ が一様な場合に最大化する. この区間の $\{\lambda_j^2\}$ の総和は

$$\sum_{j=D^{2l}+1}^{D^{2(l+1)}} \lambda_j^2 \leq \sum_{j>D^{2l}} \lambda_j^2 \leq p_{2l} < p_l \quad (4.12)$$

と上から評価できる. よって,

$$- \sum_{j=D^{2l}+1}^{D^{2(l+1)}} \lambda_j^2 \log \lambda_j^2 \leq -p_l \log \frac{p_l}{D^{2(l+1)} - D^{2l}} = p_l \log \frac{D^{2(l+1)} - D^{2l}}{p_l} \leq p_l \log \frac{D^{2(l+1)}}{p_l}. \quad (4.13)$$

ここで, 関数 $x \log(D^{2(l+1)}/x)$ は $0 < x < 1$ で単調増加だから, $l > l_0$, つまり $p_l < \Delta^{l-l_0}$ のとき

$$- \sum_{j=D^{2l}+1}^{D^{2(l+1)}} \lambda_j^2 \log \lambda_j^2 \leq \Delta^{l-l_0} \log \frac{D^{2(l+1)}}{\Delta^{l-l_0}} = \Delta^{l-l_0} (l - l_0) \log \frac{D^{2(l+1)/(l-l_0)}}{\Delta} \quad (4.14)$$

と評価できる. すると,

$$\sum_{l \geq 2l_0+1} \Delta^{l-l_0} (l - l_0) \log \frac{D^{2(l+1)/(l-l_0)}}{\Delta} = \sum_{l \geq l_0+1} l \Delta^l \log \frac{D^{2(1+\frac{l_0+1}{l})}}{\Delta} \leq \sum_{l \geq l_0+1} l \Delta^l \log \frac{D^4}{\Delta} \quad (4.15)$$

$$= \frac{\Delta^{1+l_0} (1 + l_0 - l_0 \Delta)}{(1 - \Delta)^2} \log \frac{D^4}{\Delta} \leq \frac{\Delta}{(1 - \Delta)^2} \log \frac{D^4}{\Delta}. \quad (4.16)$$

これで $i > D^{2(2l_0+1)}$ なるSchmidt固有値の寄与が上から評価できた.

$i \leq D^{2(2l_0+1)}$ なるSchmidt固有値からの寄与は、全て等しい場合が最大で、上から

$$- \sum_{i \leq D^{2(2l_0+1)}} \lambda_i^2 \log \lambda_i^2 \leq \log D^{2(2l_0+1)} = 2(2l_0+1) \log D = O(1) \frac{\log |\mu|^2}{\log \Delta} \log D \quad (4.17)$$

と評価できる。よってエンタングルメント・エントロピーの上限は

$$S \leq O(1) \frac{\log |\mu|^2}{\log \Delta} \log D + \frac{\Delta}{(1-\Delta)^2} \log \frac{D^4}{\Delta}. \quad (4.18)$$

簡略化する。任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して、 K^k も (D^k, Δ^k) -AGSP. $k = \lceil 1/\log(\Delta^{-1}) \rceil$ と選ぶと、

$$\lceil 1/\log(\Delta^{-1}) \rceil \leq k \leq \lceil 1/\log(\Delta^{-1}) \rceil + 2 \quad (4.19)$$

より、 $\log \Delta^k \leq -1$, 及び $\log \Delta^{k-2} \geq -1$. これから

$$2^{-1-\frac{2}{k-2}} \leq \Delta^k \leq 2^{-1} \quad (4.20)$$

よって $\Delta^k, \log \Delta^{-k} = O(1)$. D, Δ を D^k, Δ^k で置き換えると、

$$S \leq O(1) \frac{\log |\mu|^2}{\log \Delta^k} \log D^k + \frac{\Delta^k}{(1-\Delta^k)^2} \log \frac{D^{4k}}{\Delta^k} = O(1) \log |\mu|^{-2} k \log D + O(1) k \log D \quad (4.21)$$

$$= O(1) \frac{\log |\mu|^{-2}}{\log \Delta^{-1}} \log D. \quad (4.22)$$

□

[5]の面積則の証明の方針は、まず、基底状態と有限のoverlapを持つSchmidtランクが1のとある状態から出発して、AGSP K を作用させて基底状態を近似する。初期状態と基底状態とのoverlapはある程度大きい必要がある。

Lemma 4.2 (Lemma III.2 in [5]). $D\Delta \leq 1/2$ なる (D, Δ) -AGSP K が存在すれば、

$$\mu = \langle \Omega | \phi \rangle, \quad |\mu| \geq 1/\sqrt{2D} \quad (4.23)$$

なる状態 $|\phi\rangle = |L\rangle \otimes |R\rangle$ が存在する。

(証明) $|\phi\rangle = |L\rangle \otimes |R\rangle$ を、 $\mu = \langle \phi | \Omega \rangle$, $|\mu| < 1/\sqrt{2D}$ なる積状態とする。

$$|\phi\rangle = \mu |\Omega\rangle + \sqrt{(1-|\mu|^2)} |\Omega^\perp\rangle \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow |\phi_1\rangle := K |\phi\rangle = \mu |\Omega\rangle + \delta |\Omega_1^\perp\rangle, \quad |\delta|^2 \leq \Delta, \quad SR(\phi_1) = D \cdot SR(\phi). \quad (4.25)$$

$|v\rangle = |\phi_1\rangle / \|\phi_1\|$ と置くと、

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^D \lambda_i |L_i\rangle |R_i\rangle, \quad \sum_{i=1}^D \lambda_i^2 = 1, \quad (4.26)$$

より

$$\frac{|\mu|}{\|\phi_1\|} = |\langle \Omega | v \rangle| \leq \sum_{i=1}^D \lambda_i |\langle \Omega | L_i \rangle |R_i\rangle| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^D |\langle \Omega | L_i \rangle |R_i\rangle|^2} \leq \sqrt{D} |\langle \Omega | L_{i_{\max}} \rangle |R_{i_{\max}}\rangle| \quad (4.27)$$

を得る¹¹. ここで、 $|\langle \Omega | L_{i_{\max}} \rangle |R_{i_{\max}}\rangle| = \max_i |\langle \Omega | L_i \rangle |R_i\rangle|$ これが $|\langle \Omega | L_i \rangle |R_i\rangle|^2$ の下限を与える：

$$|\langle \Omega | L_{i_{\max}} \rangle |R_{i_{\max}}\rangle|^2 \geq \frac{|\mu|^2}{D \|\phi_1\|^2} = \frac{|\mu|^2}{D(|\mu|^2 + |\delta|^2)} \geq \frac{|\mu|^2}{D(|\mu|^2 + \Delta)}. \quad (4.28)$$

¹¹ コーシー・シュワルツの不等式 $|(x, y)|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

ここで、仮定 $D\Delta < 1/2$, $|\mu| < 1/(\sqrt{2D})$ より,

$$D(|\mu|^2 + \Delta) < 1/2 + 1/2 = 1. \quad (4.29)$$

よって、overlap $\mu_1 = \langle \Omega | L_{i_{\max}} \rangle |R_{i_{\max}}\rangle$ の絶対値は、 $|\mu|$ より真に大きい。比は

$$|\mu_1|/|\mu| \geq \frac{1}{\frac{1}{2} + D\Delta} \quad (4.30)$$

と μ に依存しない定数で下限が与えられるから、少なくとも

$$\frac{1}{(1/2 + D\Delta)^n} \geq \frac{|\mu|}{\sqrt{2D}} \quad (4.31)$$

を満たす回数 n だけ AGSP を繰り返せば良い。 \square

Corollary 4.3 (Corollary III.4 in [5]). $D\Delta \leq 1/2$ なる (D, Δ) -AGSP K が存在すれば、エンタングルメント・エントロピーは上から

$$S \leq O(1) \log D \quad (4.32)$$

と評価される。

(証明)

$$\log \Delta^{-1} \geq \log \log(2D). \quad (4.33)$$

また、 $|\mu|^{-2} \leq 2D$ なる積状態 $|L\rangle |R\rangle$ が存在する。よって、

$$S \leq O(1) \frac{\log |\mu|^{-2}}{\log \Delta^{-1}} \log D \leq O(1) \frac{\log(2D)}{\log(2D)} \log(D) = O(1) \log(D). \quad \square \quad (4.34)$$

$\log D$ の評価 (定理 3.2) より直ちに面積則が従う。

Theorem 4.4. (*Frustration free* 系の面積則. *Theorem I.1 in [5]*) 空間 1 次元, *frustration free*, *2-local*, ギャップあり, 基底状態は一意的な系を考える。局所 *Hilbert* 空間の次元を d , スペクトルギャップを $\epsilon > 0$, ハミルトニアン $H = \sum_i H_i$ の局所項の大きさを $\|H_i\| \leq J$ とする。

$$X := \frac{J \log d}{\epsilon} \quad (4.35)$$

とする。任意のカットにおいて, *von-Neumann* エンタングルメント・エントロピーの上限は以下で与えられる。

$$S_{1D} \leq O(1) X^3 \log^8 X. \quad (4.36)$$

証明では $\|H_i\| \leq 1$ としたが、ここでは J を復活させた。

雑感だが、[5] による証明は Schmidt ランクに上限をつける方針だが、vN エンタングルメント・エントロピーへの寄与は $-\lambda_i^2 \log \lambda_i^2$ であるので、Schmidt ランクに加えて Schmidt 固有値にも上限をつけることができればさらに良い評価が得られるように思う。([6] はまだ検討していないので、この点が改善されている可能性があるが。)

A 雑多な補題

Lemma A.1. \mathcal{H} をHilbert空間, X, Y を直交射影とする. $v \in \mathcal{H}$ をノルムが1のベクトルとする. $\|XYv\| = 1 - \epsilon$ とする. 次が成立:

$$\|(1 - Y)XYv\|^2 \leq \epsilon(1 - \epsilon). \quad (\text{A.1})$$

まず, 任意の直交射影 P に対して,

$$\|(1 - P)v\|^2 + \|Pv\|^2 = ((1 - P)v, (1 - P)v) + (Pv, Pv) = (v, (1 - P)v) + (v, Pv) = (v, v) = \|v\|^2 \quad (\text{A.2})$$

が成立することに注意する. 示したいことは

$$\|(1 - Y)XYv\|^2 = \|XYv\|^2 - \|YXYv\|^2 = 1 - \epsilon - \|YXYv\|^2 \leq \epsilon(1 - \epsilon) \quad (\text{A.3})$$

であるので,

$$\|YXYv\| \geq 1 - \epsilon \quad (\text{A.4})$$

を示せば良い.

$$\|XYv\|^2 = (XYv, XYv) = (v, YXYv) \leq \|v\| \cdot \|YXYv\| = \|YXYv\| \quad (\text{A.5})$$

より. □

B Proposition D.1 in [7]

一般の空間次元を考える. ハミルトニアン

$$H = \sum_j H_j \quad (\text{B.1})$$

が局所的とは,

$$\|[H_j, \mathcal{O}_i]\| \leq u(|j - i|) \quad (\text{B.2})$$

が成立すること. ここで, u は任意のべきより早く減衰する関数. (指数関数的減衰は要請せず, べきよりも早く減衰すると仮定.)

$H = \sum_j H_j$ をギャップのある局所ハミルトニアンとする. 基底状態 $|\Psi\rangle$ のエネルギー固有値はゼロとする. $\Delta > 0$ をギャップとする. このとき, $|\Psi\rangle$ をある局所項 H_j のゼロエネルギー固有状態 $\tilde{H}_j |\Psi\rangle = 0$ として表現できる.

これを示す.

$$\tilde{H}_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iHt} H_j e^{-iHt} w(t) dt \quad (\text{B.3})$$

とする. すると,

$$\sum_j \tilde{H}_j = H \times \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt. \quad (\text{B.4})$$

よって,

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = 1 \quad (\text{B.5})$$

なるように $w(t)$ を取る. つまり, フーリエ変換

$$\hat{w}(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} dt w(t) e^{i\epsilon t} \quad (\text{B.6})$$

に対して,

$$\hat{w}(0) = 1 \quad (\text{B.7})$$

とする. また, \tilde{H}_j にエルミート性を要求すると,

$$w(t)^* = w(-t) \Leftrightarrow \hat{w}(\epsilon)^* = \hat{w}(-\epsilon). \quad (\text{B.8})$$

任意の励起状態 $|n\rangle$ に対して,

$$\langle n | \tilde{H}_j | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iE_n t} \langle n | H_j | \Psi \rangle w(t) dt = \hat{w}(E_n) \langle n | H_j | \Psi \rangle \quad (\text{B.9})$$

であるので, $\hat{w}(\epsilon)$ を

$$\hat{w}(|\epsilon| > \Delta) = 0 \quad (\text{B.10})$$

が成立するように取ると, 基底状態への射影を P として,

$$(1 - P)\tilde{H}_j P = 0 \quad (\text{B.11})$$

という望みの性質が得られる. $\hat{w}(\epsilon)$ を

$$\hat{w}(\epsilon = 0) = 0, \quad \hat{w}(|\epsilon| > \Delta) = 0 \quad (\text{B.12})$$

を満たす滑らかな (C^∞ 級) 関数とする. よって, $w(t)$ は任意のべきより早く減衰する.

残りは \tilde{H}_j が局所的であるように構成できるかどうか. サイト i 近傍に台を持つ任意の局所演算子 O_i に対して,

$$\|[\tilde{H}_j, O_i]\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \| [H_j(t), O_i] \| |w(t)| dt. \quad (\text{B.13})$$

Lieb=Robinson限界より, 大雑把に,

$$\| [H_j(t), O_i] \| \leq c \| H_j \| \| O_i \| \times \max\{e^{-a(l-v|t|)}, 1\}, \quad l \sim |i - j|. \quad (\text{B.14})$$

として良いだろう¹².

$$\|[\tilde{H}_j, O_i]\| \leq c \| H_j \| \| O_i \| \times 2 \times \left[\int_0^{l/v} e^{-a(l-vt)} |w(t)| dt + \int_{l/v}^{\infty} |w(t)| dt \right] \quad (\text{B.15})$$

と見積もることができる. これが, l に関して任意のべきより早く減衰することを示したい.

以下の証明は下村氏によるもの¹³.

¹²現在得られている結果において, Lieb=Robinson限界の H_j に関する条件は, 空間次元に依存して, どの程度のべき減衰まで許容されるのかを確認する.

¹³Kenji Shimomura, private communication.

$w(t)$ は任意のべきより早く減衰するため, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$|w(t)|t^n \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{B.16})$$

が成立する. $w(t)$ は有界なので, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対してある定数 M_n が存在して,

$$|w(t)| \leq M_n t^{-n} \quad \text{for } t > 0, \quad (\text{B.17})$$

として良い. すると,

$$\int_{l/v}^{\infty} |w(t)| dt \leq \int_{l/v}^{\infty} M_{n+1} t^{-n-1} dt = M_{n+1} (-n)^{-1} (-l/v)^{-n} = O(l^{-n}), \quad (\text{B.18})$$

$$\int_0^{l/v} e^{-a(l-vt)} |w(t)| dt \leq \int_0^{l/(2v)} e^{-a(l-vt)} M_0 dt + \int_{l/(2v)}^{l/v} e^{-a(l-vt)} M_{n+1} t^{-n-1} dt \quad (\text{B.19})$$

$$= M_0 \frac{e^{-al/2} - e^{-al}}{av} + M_{n+1} (l/v)^{-n} \int_{1/2}^1 e^{-a(l-ls)} s^{-n-1} ds \quad (\text{B.20})$$

$$\leq M_0 \frac{e^{-al/2} - e^{-al}}{av} + M_{n+1} (l/v)^{-n} \int_{1/2}^1 s^{-n-1} ds \quad (\text{B.21})$$

$$= M_0 \frac{e^{-al/2} - e^{-al}}{av} + M_{n+1} (l/v)^{-n} \frac{2^n - 1}{n} \quad (\text{B.22})$$

$$= O(l^{-n}). \quad \square \quad (\text{B.23})$$

C Eckart-Young-Mirskyの定理

$m \times n$ 行列 $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ に対して, A の特異値分解を

$$A = U \Sigma V^\dagger = \sum_{i=1}^{\text{rank}(A)} \sigma_i u_i v_i^\dagger, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \quad (\text{C.1})$$

とする. Frobeniusノルムの定義は

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}[A^\dagger A]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\text{rank}(A)} \sigma_i^2}. \quad (\text{C.2})$$

ここで, σ_i は A の特異値.

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^\dagger \quad (\text{C.3})$$

と書く. 主張は以下.

2ノルム, Frobeniusノルムの意味で, A のランク k の行列による最良の近似は A_k で与えられる. つまり, 任意のランク k の行列 B_k に対して,

$$\|A - B_k\|_F \geq \|A - A_k\|_F, \quad \|A - B_k\|_2 \geq \|A - A_k\|_2, \quad (\text{C.4})$$

が成立する.

[9]の証明のメモ. Wylの不等式¹⁴より, 任意の i, j に対して,

$$\sigma_{i+j-1}(X + Y) \leq \sigma_i(X) + \sigma_j(Y) \quad (\text{C.7})$$

¹⁴ $n \times n$ エルミート行列 A に対して, その固有値を大きいものから順に並べたものを

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \quad (\text{C.5})$$

が成立. B のランクを k とする. $\sigma_{i>k}(B) = 0$ に注意. $j = k + 1, X = A - B, Y = B$ として,

$$\sigma_{i+k}(A) \leq \sigma_i(A - B) + \sigma_{k+1}(B) = \sigma_i(A - B). \quad (\text{C.8})$$

すると,

$$\|A - B\|_2 = \sigma_1(A - B) \geq \sigma_{k+1}(A) = \sigma_1(A - A_k). \quad (\text{C.9})$$

$$\|A - B\|_F^2 = \sum_i \sigma_i^2(A - B) \geq \sum_i \sigma_{i+k}^2(A) = \|A - A_k\|_F^2. \quad (\text{C.10})$$

系として以下を得る.

規格化された状態 $|\psi\rangle$ に対して, Schmidt分解を $|\psi\rangle = \sum_{i \geq 1} \lambda_i |L_i\rangle |R_i\rangle$ とする. $|\phi_k\rangle$ をSchmidtランク k の規格化された状態とする. 次が成立する.

$$|\langle \psi | \phi_k \rangle|^2 \leq \sum_{i \leq k} \lambda_i^2. \quad (\text{C.11})$$

(証明) k ランク近似を $|\psi_k\rangle = \sum_{i \leq k} \lambda_i |L_i\rangle |R_i\rangle$ として, その規格化状態を $|\tilde{\psi}_k\rangle = |\psi_k\rangle / \|\psi_k\| = |\psi_k\rangle / \sqrt{\sum_{i \leq k} \lambda_i^2}$ とする. (C.10)より

$$\| |\psi\rangle - |\phi_k\rangle \|^2 \geq \| |\psi\rangle - |\tilde{\psi}_k\rangle \|^2 \quad (\text{C.12})$$

である.

$$2 - 2\text{Re} \langle \psi | \phi_k \rangle \geq 2 - 2\text{Re} \langle \psi | \tilde{\psi}_k \rangle \quad (\text{C.13})$$

より

$$\text{Re} \langle \psi | \phi_k \rangle \leq \text{Re} \langle \psi | \tilde{\psi}_k \rangle = \frac{\sum_{i \leq k} \lambda_i^2}{\sqrt{\sum_{i \leq k} \lambda_i^2}} = \sqrt{\sum_{i \leq k} \lambda_i^2}. \quad (\text{C.14})$$

$|\phi_k\rangle$ の位相は任意なので, 主張を得る.

References

- [1] M. B. Hastings, *An Area Law for One Dimensional Quantum Systems*, arXiv:0705.2024.
- [2] Dorit Aharonov, Itai Arad, Zeph Landau, Umesh Vazirani, *The Detectability Lemma and Quantum Gap Amplification*, arXiv:0811.3412.
- [3] Dorit Aharonov, Itai Arad, Zeph Landau, Umesh Vazirani, *Quantum Hamiltonian complexity and the detectability lemma*, arXiv:1011.3445.
- [4] Anurag Anshu, Itai Arad, Thomas Vidick, *A simple proof of the detectability lemma and spectral gap amplification*, arXiv:1602.01210.
- [5] Itai Arad, Zeph Landau, Umesh Vazirani, *An improved 1D area law for frustration-free systems*, arXiv:1111.2970.

と書く. 任意の i, j に対して

$$\lambda_{i+j-1}(A + B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \leq \lambda_{i+j-n}(A + B) \quad (\text{C.6})$$

が成立する.

- [6] Itai Arad, Alexei Kitaev, Zeph Landau, Umesh Vazirani, *An area law and sub-exponential algorithm for 1D systems*, arXiv:1301.1162.
- [7] Alexei Kitaev *Anyons in an exactly solved model and beyond*, math-ph/0507008.
- [8] Ayumi Ukai, *On Hastings factorization for quantum many-body systems in the infinite volume setting*, arXiv:2407.12324.
- [9] Physics Stack Exchange, *Proof of Eckart-Young-Mirsky theorem*, [url](#).